

# 三维正交非结构网格数值模型中物理流场的定义方法与改进\*

刘晓辉<sup>1</sup> 董礼先<sup>1</sup> Ralph T. Cheng<sup>2</sup>

(1. 卫星海洋环境动力学国家重点实验室 国家海洋局第二海洋研究所 杭州 310012;

2. Water Resources Division, USGS, USA, Menlo Park, CA 94025)

**提要** 使用 Casulli 等(2000)的数值方法建立了基于正交非结构网格的 U 型渠道的三维近岸正压水动力数值模型, 检验了模型使用 ELM(Eulerian-Lagrangian Method)方法处理平流项时, 物理流场的定义对模拟结果的作用。数值试验和结果分析说明, 使用 ELM 方法计算平流项所需的物理流场对计算结果影响明显, 而目前常用的两种物理流场定义方法都存在一定不足——水位计算值对流速变化的反映不灵敏或者会产生小扰动等。针对常用物理流场定义方法的不足之处, 作者在 Casulli 方法的基础上利用对多边形切向流速分量进行平均的方法改进了物理流场定义, 抑制了小扰动。

**关键词** 非结构网格, 数值模型, ELM 方法, 物理流场

**中图分类号** P731.2

按照数值模型所采用的水平离散网格的形式, 常用的海洋有限差分数值模型可以分为正交结构网格模型、非正交曲线网格模型、非结构网格模型。相比较而言, 非结构网格在处理复杂地形和岸线方面具有地形逼近精度好、空间离散自由度大、控制方程不会产生附加项、不会引起较大的离散误差和不稳定等优点(孙文心等, 2004; 陈昞睿等, 2008; Van de Molen *et al.*, 1997; Oran *et al.*, 1987; Casulli *et al.*, 2000; Zhang *et al.*, 2004; Baptista *et al.*, 2005)。

Casulli 等(2000)提出了一种基于正交非结构网格的水动力学数值模型, 得到广泛应用(Casulli *et al.*, 2000; Cheng *et al.*, 2001; Zhang *et al.*, 2004)。模型使用正交非结构网格把计算区域在水平上划分成若干没有重叠的凸多边形。多边形的顶点组成计算区域的“节点”, 连接节点的线段组成计算区域的“边”。所谓正交非结构网格, 是指网格中任意两个相邻的多边形(polygon)中心的连线与它们所夹的边(side)相交且垂直。模型在离散时, 水位定义在多边形中心上,

流速被定义边的中点上。网格划分后, 对每个多边形及每条边进行编号。 $N_p$  代表整个网格多边形的总数, 每个多边形有  $S_i$  条边组成,  $S_i \geq 3, i=1, 2, \dots, N_p$ ;  $N_s$  代表整个网格的边的总数,  $\lambda_j (j=1, 2, \dots, N_s)$  为第  $j$  条边的长度,  $\delta_j (j=1, 2, \dots, N_s)$  为第  $j$  条边相邻两多边形中心的距离; 第  $i$  个多边形的边定义为  $j(i, l), l=1, 2, \dots, S_i$ , 则  $1 \leq j(i, l) \leq N_s$ ; 第  $j$  条边相邻的两个多边形定义为  $i(j, 1), i(j, 2)$ , 则  $1 \leq i(j, 1) \leq N_p, 1 \leq i(j, 2) \leq N_p$ (图 1)。在垂向上用  $z$  坐标离散。在水平方向使用动量方程计算边上的法向流速, 并利用边上的法向流速和连续方程计算多边形中心的水位。为了计算稳定和控制数值弥散, 模型使用 ELM 方法处理动量方程的平流项(Staniforth *et al.*, 1986; Casulli, 1990)。由于 ELM 方法中的 Lagrange 质点轨迹追踪和计算元素插值需要使用物理流场, 而各个边上的法向流速只是一个流速分量, 并不直接构成物理流场。因此在使用 ELM 方法时需要先定义计算区域的物理流场。Zhang 等(2004)利用补充计算每条边的切向流速的方法定义计算区域的

\* 国家重点基础研究发展(973)计划, 2006CB400602、2007CB816003 号、我国近海海洋综合调查与评价专项, 908-02-01-04 号、海洋公益性行业科研专项经费项目, 200705013 号、国家海洋局第二海洋研究所基本科研业务专项资金项目, JG200810 号。刘晓辉, E-mail: rayliuxh@yahoo.com.cn

收稿日期: 2009-02-14, 收修改稿日期: 2009-12-16

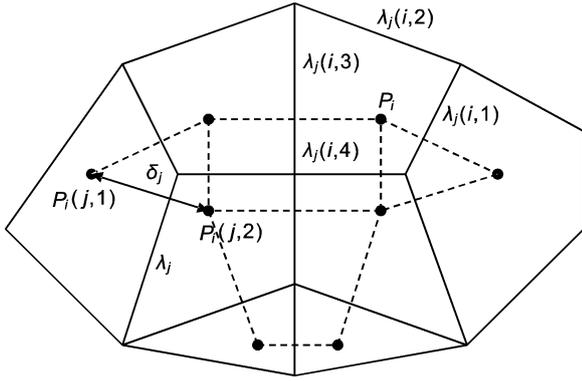


图 1 正交非结构网格(Casulli et al, 2005)

Fig.1 Orthogonal unstructured grid (Casulli et al, 2005)

物理流场; Casulli 等(2000)在每个多边形内, 通过几何合成连接多边形节点的边上的法向流速定义多边形的物理流场。

本文中作者使用该数值模型在 U 型渠道中建立了三维水动力模型, 以检验以上两种物理流场定义的方法对模型计算结果的影响。为了使研究问题简单化, 模型是正压的。数值实验结果显示, 目前流行的两种物理流场定义各有优、缺点。使用 Casulli 等(2000)的物理流场定义的数值实验结构较为合理, 但水位和流速时间过程存在小扰动; 而 Zhang 等(2004)的物理流场定义的计算精度较好; 但数值实验结果说明, 在地形复杂时, 流场容易失真。为此, 作者在 Casulli 等(2000)方法的基础上, 提出了一种新的物理流场定义方法, 改进了模拟结果。

### 1 ELM 方法与物理流场的两种定义方法

ELM 方法在计算动量方程的平流项时, 首先使用 Lagrange 方法和物理流场, 确定流体微团在上一个时刻所处的位置  $K(x,y,z)$ , 然后通过插值求取该点的流速, 从而获得本时刻流体微团的流速(Casulli, 1990)。目前常用的物理流场定义方法有两种: 第一种是先按数值模型的数值方法计算各边上的法向流速分量, 然后通过求解切向动量方程补充计算各边上的切向流速分量。将这两个分量转换成整体  $x-y$  坐标的流速后, 在各节点上将连接节点的各个边的流速矢量进行平均就得到该节点的物理流速(Zhang et al, 2004)。其中, 求解切向流速的节点上水位波动值是通过平均节点周围多边形中心的水位值获取。

第二种物理流场定义方法是逐个定义每一个多边形内的物理流场。流速定义在多边形顶点, 但流速

矢量不是通过补充求解切向动量方程获得, 而是在每一个多边形中, 通过连接该顶点的两条边的法向流速, 采用几何投影的方法得到的(Cheng, 个人通讯)。具体方法是, 在每个多边形中, 假设每个顶点(以  $p$  点为例)的物理流速  $V_p$  在相邻的两条边  $j_1$ 、 $j_2$  法向上的分量  $V_{n1}$ 、 $V_{n2}$  即等于每条边的法向流速, 那么利用每条边的法向流速通过投影就可以反推出顶点的物理流速  $V_p$ (图 2B)。对于矩形结构网格, 该投影方法即等价于传统意义上的矢量合成法则(图 2A), 因此该方法的物理意义是明确的。合成后, 多边形每个顶点上有一个物理流速, 此多边形内任意一点的物理流速通过内插得到。但由于同一个顶点连接多个多边形, 而该方法是在多边形内进行的, 因此在多边形之间会出现物理流速不连续的情况。

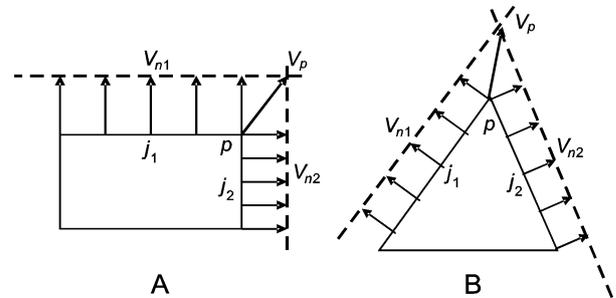


图 2 物理流速的合成方法

A. 矩形网格流速合成; B. 非结构网格流速合成

( $V_{n1}$ 、 $V_{n2}$  表示边  $j_1$ 、 $j_2$  的法向流速,  $V_p$  表示节点  $p$  上合成得到的物理流速)

Fig.2 Methods of composing the physical velocity ( $V_{n1}$  and  $V_{n2}$  stands for the normal velocity on sides  $j_1$  and  $j_2$ ,  $V_p$  stands for the composed physical velocity on node  $p$ )

### 2 数值实验与结果分析

为了检验两种不同物理流场在 ELM 方法中的使用效果, 作者在两头开口的 U 型理想弯曲渠道中进行数值实验。在渠道的两端给定恒定的水位差后, 在压强梯度力的作用下会产生稳定的流场; 在转弯处压强梯度力和离心惯性力的共同作用会产生横向的环流(张耀先等, 2003)。主流的转向及横向环流的存在使得转弯处的平流及对流作用相对较大, 这样对于检验平流项处理的效果有一定的代表意义。渠道总长 8570 m, 宽 120 m, 水深统一取为 10 m。计算区域在水平上采用接近正三角形进行离散, 每个三角形的边长约 20 m。垂向上, 两层间距统一取为 1 m。渠道两头给定 0.1 m 的水位差, 即开边界 1 的水位统一

设为 0.1 m, 开边界 2 的水位统一设为 0.0 m(图 3)。实验中取时间步长  $\Delta t = 150\text{s}$ ; 由于空间尺度较小, 因此不考虑科氏力的作用, 半隐式算子  $\theta = 0.6$ , 能够限制数值弥散(Casulli *et al.*, 1994; Zhang *et al.*, 2004); 为保持模型的稳定性, 水平方向的动量扩散系数  $\nu^h$  取为 0; 由于不同的物理流场插值方法会对流速的大小产生一定的影响, 为了得到基本相等的流速大小以便于比较, 第一种插值方法在实验时垂向动量扩散系数  $\nu^v$  取为  $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , 第二种插值方法取为  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 。在  $z = \eta$  处, 取  $\nu^v u_z = \nu^v v_z = 0$ , 即不考虑自由表面与空气之间的摩擦力。在  $z = -h$  处, 底边界条件取为  $\nu^v u_z = \gamma_B u$ ,  $\nu^v v_z = \gamma_B v$ , 底摩擦系数  $\gamma_B = 0.0025$ 。

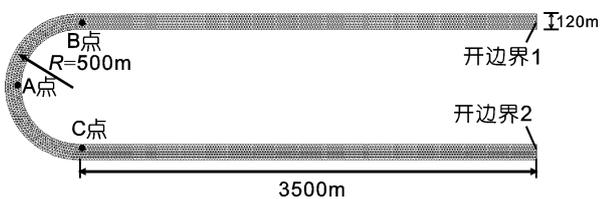


图 3 计算区域平面网格分布

Fig.3 The horizontal grids in the numerical tests

模型输出统计说明, 使用两种不同定义物理流场的方法, 在整个 U 型渠道中, 所有计算点上得到的水位绝对均方差为 0.3 cm, 相对均方差为 5.9%; 流速绝对均方差为 4.4 cm/s, 相对均方差为 5.1%; 流向均方差为  $1.2^\circ$ , 最大差值为  $8^\circ$ 。取转弯处的某点 A 观察其水位和流速的变化情况。A 点位于 U 型渠道转弯弧顶, 距离凸岸 32 m(位置见图 3), 该点水位、流速和流向时间变化过程显示, 使用第一种物理流场定义方法时, 水位、流速和流向过程曲线变化平稳; 而使用第二种物理流场定义方法时, 水位和流速时间变化过程均出现小振幅的扰动(图 4)。这些小扰动幅度都很小, 水位和流速的扰动幅度一般都分别小于 0.05 cm 和 0.5 cm/s。

第一种方法虽然水位和流速时间过程平滑, 但长时间计算结果显示, 在开始计算的前 7 天中, 其水位和流速仍然缓慢变化, 说明模型仍然没有达到最后的稳定状态(图略)。引起该现象的原因可能主要是如前所述, 多边形的边的切向流速不能直接反馈到边的两端的水位计算中, 造成流场和水位之间的不协调。在 U 型渠道的弯道中, 水流的惯性离心力将在弯道中形成横向水面坡度(凹岸水面高, 凸岸水面低)。在惯性离心力和横向水面坡度产生的重力的共

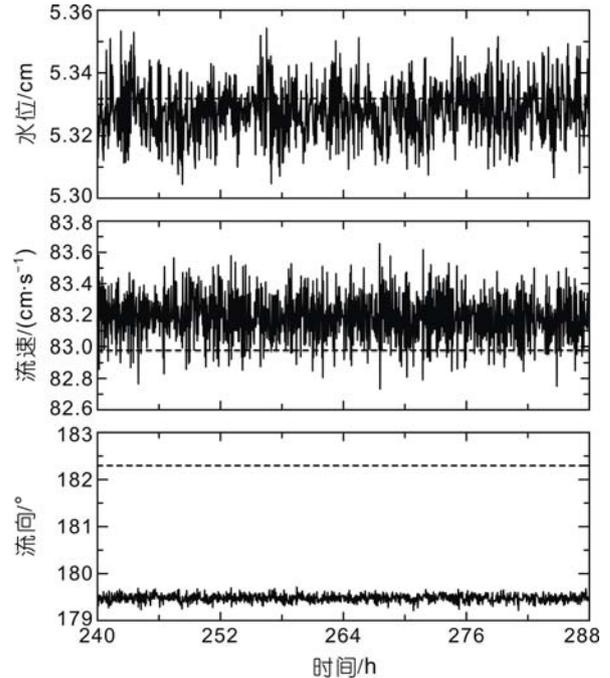


图 4 渠道 A 点的水位、流速和流向变化过程(虚线: 方法 1; 实线: 方法 2)

Fig.4 Variations of the water surface elevation, current speed and current direction at point A in the U-channel (dashed line : the first method; solid line : the second method)

同作用下, 弯道横断面上的上层余流指向凹岸(图 5 中的 D 点), 并在靠近凹岸一侧下沉; 而下部则指向凸岸(图 5 中的 E 点), 并在靠近凸岸一侧上升, 构成弯道中的横向环流(张耀先等, 2003)。使用第二种方法处理平流项时, 得到的 D-E 断面的横向环流与通常的认识较为一致(图 5 上图)。但使用第一种方法处理平流项时, D-E 断面在靠近 D 点时流速较大, 而且流向由表至底全部指向渠道边壁; 而靠近 E 点处的上层流量也偏大(图 5 下图)。图 5 最左和最右侧的流速剖面分别是离渠道边壁(D 点和 E 点)距离小于 10 m 处的流速。这两处水平流速过大与穿越固体边界流速分量为零的固边界条件不协调。

使用第二种方法的数值实验说明, 在 U 型渠道转弯处靠近图 5 中的 E 点附近, 小扰动明显。小扰动平均振幅的平面分布说明, 小扰动从 U 型渠道的弯道开始, 并向流动的下游传播(没图示)。在忽略数值模型的平流项后, 模型输出的结果是小扰动问题消失。这说明第二种方法之所以会产生小振幅的抖动, 也是处理平流项时产生的。如上所述, 第二种物理流场方法是逐个三角形定义的。相邻两个多边形之间由于采用了不同的边上的法向流速进行合成, 流速的

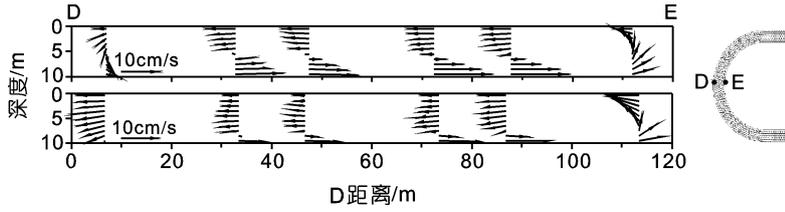


图5 D-E断面垂向流速分布(下图为采用第一种方法获得的结果, 上图为采用第二种方法获得的结果)

Fig.5 Vertical velocity distributions along Section D-E (The lower panel is the result from the first advection method, and the upper is the result from the second advection method)

形之间的间断。使用这样的物理流场和 ELM 方法处理平流项时, 得到的水位和流速都将产生小扰动(图 4)。这可能是弯道附近流动的空间变化较大, 导致流速在相邻多边形之间的不连续性增强造成的。

### 3 改进的物理流场定义

以上数值实验结果说明, 正交非结构网格数值模型在使用第二种物理流场定义方法时, 得到的结果更为理想些。不足之处是, 由于物理流场在多边形之间的不连续性, 导致模拟结果出现小扰动。针对这一缺点, 本文中作者提出另外一种离散计算区域的物理流场的定义方法。具体方法分 3 步进行, 第一步是使用第二种方法在每个三角形的顶点求得流速矢量, 并针对连接该顶点的三角形的两个边, 将该物理流速分解成每个边的法向分量和切向分量。第二步是在每个三角形中, 将每个边两端顶点的切向和法向分量进行平均, 作为该边的切向分量和法向分量(实际上, 因为该边两端顶点物理流速计算方法的原因, 该边两端点处的法向分量是相同的)在整个计算区域完成此步计算之后, 因计算区域内每个三角形的边同时也是该边相邻接三角形的一个边, 所以任何连接两个顶点的边都具有两个切向分量和两个法向分量, 分属该边两边的三角形。根据上述计算不难看出, 从每个边两边的三角形中得到的该边的法向分量是相同的, 就是第一步开始时该边的法向分量。而从该边两侧的两个三角形中分别得到的两个切向分量却可能是不同的。正是这两个切向分量的不同, 造成了该边上流速的不连续性。为了消除这个不连续性, 第三步是将从每个边两侧三角形中得到的两个切向分量的平均值作为该边的切向分量, 并将这个切向分量和法向分量定义为该边中点的物理流

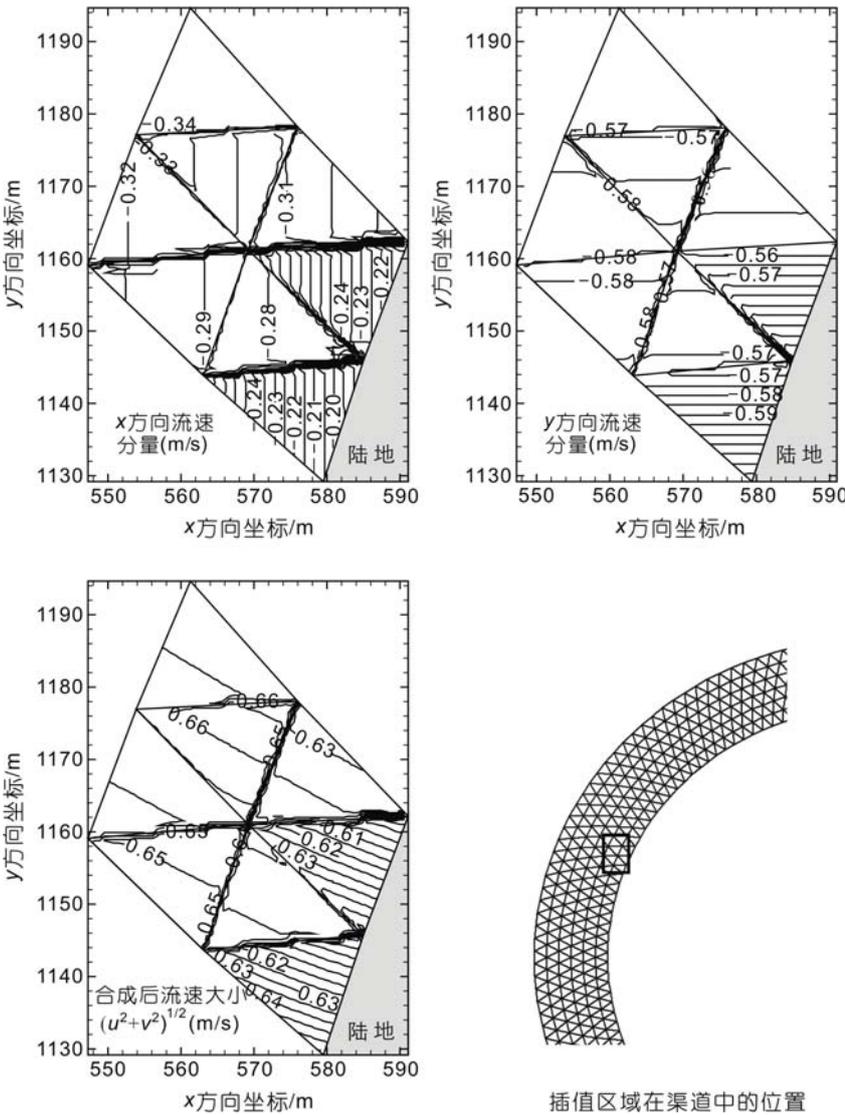


图6 使用第二种方法计算得到的 A 点附近的流速分布

Fig.6 Velocity distributions in the area near point A derived by the second method

连续性在边上无法得到保证。图 6 为按照第二种方法得到的 A 点附近的物理流场的 x 和 y 向流速分量以及流速大小的分布。图中清楚地显示了流速在不同多边

形之间的不连续性, 第三步是将从每个边两侧三角形中得到的两个切向分量的平均值作为该边的切向分量, 并将这个切向分量和法向分量定义为该边中点的物理流

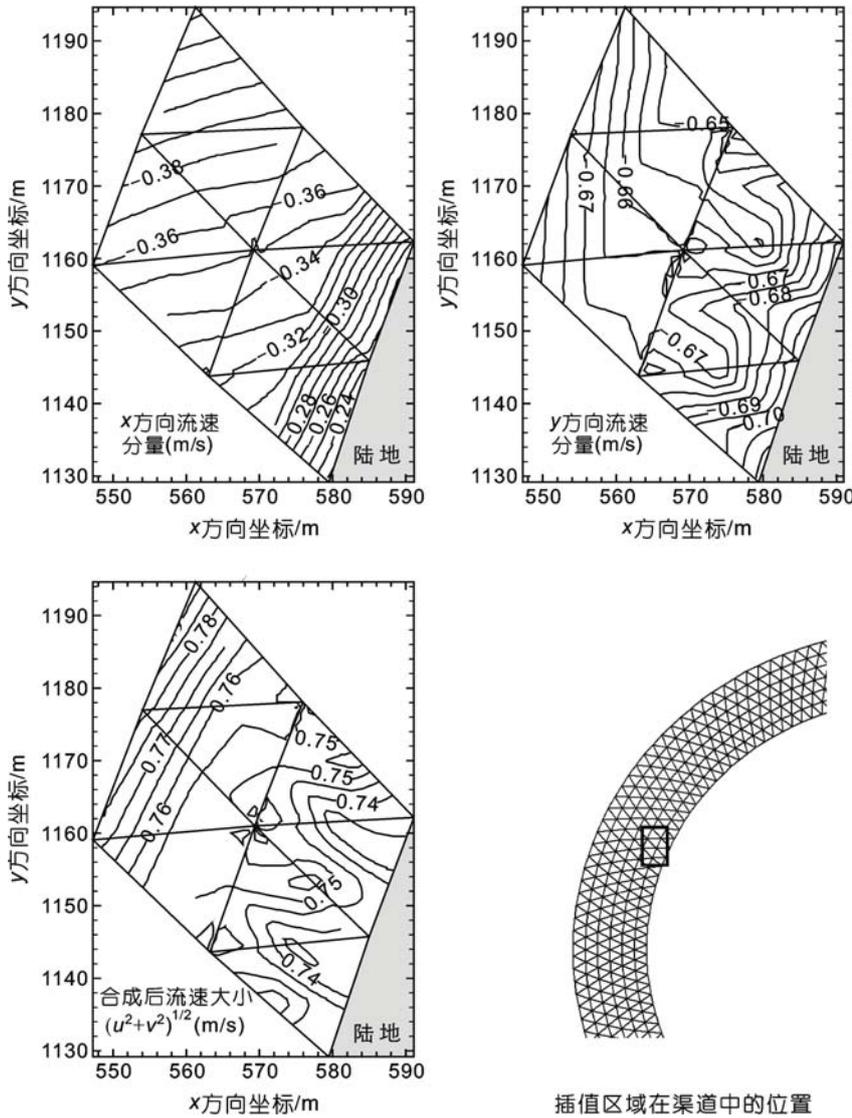


图 7 改进后插值得到的弯道内侧流速分布图

Fig.7 Distributions of the velocity interpolated derived by the improved method in the U-Channel

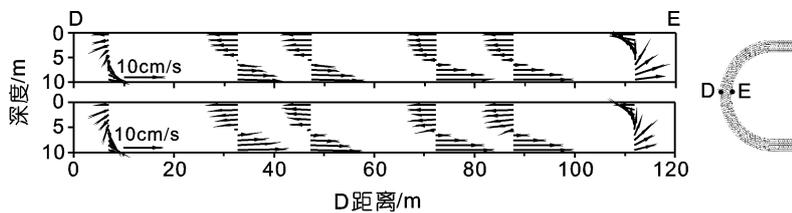


图 8 改进前、后 D-E 断面垂向流速分布

(上图为改进后的结果, 下图为改进前采用第二种方法的结果)

Fig.8 Vertical velocity distributions before and after improvement along the D-E section (the upper panel is the result after improvement, the lower panel is that before improvement using the second method)

分量, 形成整体坐标下的物理流场。

改进后的物理流场由于相邻三角形公共边上只有一个物理流速, 从而保证了流场在三角形之间的连续性(图 7)。而改进的物理流场的定义方法仍保持了第二种方法的基本思路, 最后形成的整体坐标下的物理流场仍是从各个边的法向流速计算得到, 保持了流场与水位波动场之间的协调性。此外, 物理流速改为定义在边的中点上, 从而使得固体边界法向流量为零的边界条件在弯曲边界上也可以严格得到满足。但物理流速定义在三角形的边界上产生的不利效果是, 增大了在使用 ELM 方法时的计算量。当流体微团在上一个时刻所在处的位置  $K(x,y,z)$  点落在三角形三个边的中点围成的新的小三角形内部时, 使用该小三角形三个顶点(原三角形三条边的中点)为型值点可以得到  $K$  点的内插值; 但如果  $K$  点落在小三角形外部时, 使用小三角形顶点作为型值点, 则无法得到  $K$  点的内插值, 必须寻找  $K$  点周围其他的物理流速定义点作为辅助型值点, 以保证内插  $K$  点的流速。为了提高计算效率, 采用线性插值方法进行插值。

图 8 为改进后 U 型渠道 D-E 断面的横向环流剖面图, 可以看到改进后垂向环流依然存在, 与改进前采用第二种方法的结果相比变化不大。图 9 为物理流场定义方法改进前、后 U-型渠道弯道 A 点(位置见图 4)的水位和流速时间过程变化图, 可以看到改进前后抖动的振幅有了明显的减小。

物理流场定义方法改进后, U 型渠道中所有水位点的计算值与改进

之前的均方差为 0.043 cm, 流速均方差为 2.7 cm/s, 占流速平均值的 3.1%。也就是说, 改进前、后的水位

之前的均方差为 0.043 cm, 流速均方差为 2.7 cm/s, 占流速平均值的 3.1%。也就是说, 改进前、后的水位

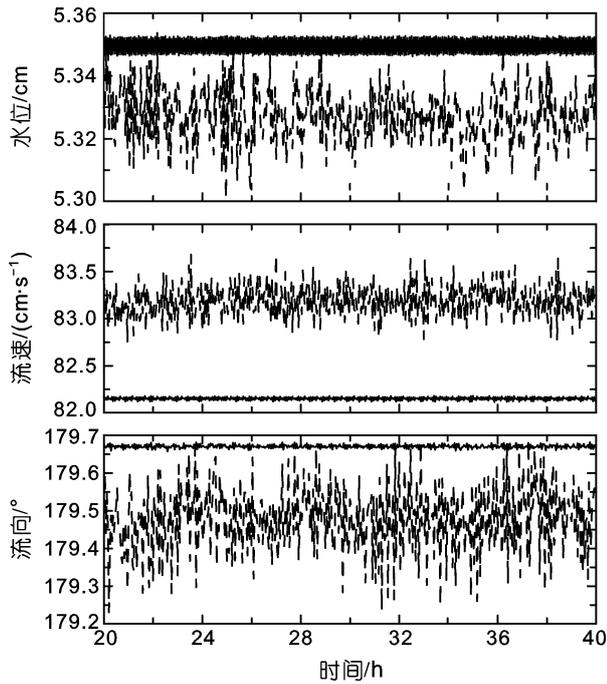


图9 改进前、后渠道 A 点水位、流速和流向时间序列比较(虚线:改进前;实线:改进后)

Fig.9 Comparisons of the water surface elevation, current speed and direction at point A derived by using the improved method with those by the second method

和流场分布变化不大。但改进后,水位和流速的小扰动幅度明显减小,约为改进前的 1/10。

改进后的计算效率较改进前有了一定的降低。在同样的计算条件下(Pentium 4 CPU 3.2 GHz, 1GB 内存),计算 U 型渠道(水平方向有 3013 个节点、5154 个三角形、8166 个边,垂直方向有 10 层)时,改进前计算 10 天需用时 3.74 h 左右,而改进后用时 5.65 h 左右。

#### 4 结语

非结构网格数值模型具有岸线和地形拟合好、网格划分自由度大等特点,是目前国内外近岸和河口数值模型的发展方向。在正交非结构数值模型中使用 ELM 方法虽然具有计算稳定和数值弥散易于控制等优点,但非结构数值模型一般都只计算离散计算区域的多边形的边上的法向流速,并不直接构成物理流场。如何为 ELM 方法在非结构数值模型中定义整体坐标下的物理流场仍是一个探讨中的问题。目前常用的物理流场定义方法有两种,第一种是通过求解多边形边在切向上的动量方程的方法补足流速分量;第二种是在每个多边形内使用几何合成方法获取节

点上的流速,逐个定义每个多边形的物理流场。通过在 U-型渠道中进行的一系列数值实验说明这两种物理流场定义都存在一定的不足之处,其中第二种方法所获得的结果较为理想。不足之处是该方法由于物理流场在多边形之间的连续性得不到保障,造成了计算结果出现小扰动。为此,作者在这种方法的基础上提出了新的物理流速的定义方法。该方法通过平均多边形的每个边在其两侧的切向流速值消除了物理流场在多边形之间的不连续性,抑制了模型计算结果中的小扰动问题。

#### 参 考 文 献

- 孙文心,江文胜,李磊,2004.近海环境流体动力学数值模型.北京:科学出版社,164—210
- 张耀先,丁新求,孙东坡,2003.弯道水流横向流动与输沙研究,水利建设与管理,4:76—78
- 陈昞睿,朱建荣,戚定满,2008.采用质点跟踪方法对物质输运方程平流项数值格式的改进.海洋与湖沼,39(4):439—445
- Baptista A M, Zhang Y, Chawla A *et al*, 2005. A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: Application to the Columbia River. *Continental Shelf Research*, 25(7—8): 935—972
- Casulli V, 1990. Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. *J Comput Phys*, 86: 56—74
- Casulli V, Cattani E, 1994. Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for 3D shallow water flow. *Computers & Mathematics with Applications*, 27: 99—112
- Casulli V, Walters R, 2000. An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32: 331—348
- Casulli V, Zanolli P, 2005. High resolution methods for multidimensional advection-diffusion problems in free-surface hydrodynamics, *Ocean Modelling*, 10: 137—151
- Cheng R T, Casulli V, 2001. Evaluation of the UnTRIM model for 3-D tidal circulation. In: Spaulding M, Blumberg A ed. *Proceedings of the 7-th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling*, St Petersburg, FL, November 2001, 628—642
- Oran E S, Boris J P, 1987. *Numerical simulation of reactive flow*. Elsevier, New York, 200—221
- Van der Molen J, Stelling G S, 1997. A non-orthogonal finite difference method for shallow water flow. In: J van der Molen ed. *Tides in a Salt-Marsh*, Febodruk BV, Enschede, Netherlands, 29—59
- Staniforth A, Temperton C, 1986. Semi-implicit semi-Lagrangian

integration schemes for a barotropic finite element regional model, *Month. Weather Rev*, 114: 2078—2090  
Zhang Y, Baptista A M, Myers E P, 2004. A cross-scale model for

3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment. *Continental Shelf Research*, 24(18): 2187—2214

## THE PHYSICAL CURRENT VELOCITY DEFINITION AND ITS IMPROVEMENT IN THE 3-D ORTHOGONAL UNSTRUCTURED GRID NUMERICAL MODEL

LIU Xiao-Hui<sup>1</sup>, DONG Li-Xian<sup>1</sup>, Ralph T. Cheng<sup>2</sup>

(1. *State Key Laboratory of Satellite Ocean Environment Dynamics, Second Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Hangzhou, China, 310012*; 2. *Water Resources Division, USGS, USA, Menlo Park, CA 94025*)

**Abstract** A 3-D coastal barotropic hydrodynamic numerical model in a U-channel covered with an orthogonal unstructured grid was established using the numerical scheme of Casulli (2000). The effects of two current velocity definitions of physical current field for the advection term calculated by the Eulerian-Lagrangian Method (ELM) were examined. The numerical experiments and the results analysis showed that the results were obviously influenced by the definition of the physical current field used by ELM. Some disadvantages exist using the two common methods, such as insensitive feeding back between the velocity and elevation and existence of small oscillation. A new physical current field definition based on Casulli's scheme was proposed to inhibit the small oscillation in the orthogonal unstructured grid numerical model.

**Key words** Unstructured grid, Numerical model, Eulerian-Lagrangian Method, Physical current field