第 31 卷 第 3 期
2000 年 5 月

海 洋 与 湖 沼
OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA

Vol.31 No.3
May, 2000

二维物性界面深度重磁反演的一种非线性迭代解法——样条函数法*

王硕儒　于增慧†

(青岛海洋大学地球科学学院　青岛　266003)

†(中国科学院海洋研究所　青岛　266071)

提要　提出一种重磁异常非线性反演的直接解法，它是基于迭代法求解一个非线性积分方程。当物性界面起伏分布 Δh 满足 $|\Delta h| < (\sqrt{2}-1)h$ 时，积分的被积函数可展成 Δh 的幂级数，考虑 Δh 高次项的影响，应用简单迭代法可将问题化成相应的线性积分方程，并可用 B 样条函数求解。在不同磁化方向的 ΔT 和 Za 异常上和变密度界面引起的重力异常上实现了模拟反演。精度显著高于线性直接解。在南海东沙群岛地区进行了莫霍面的反演计算，效果良好。

关键词　重磁异常反演　非线性积分方程　迭代　B 样条函数

学科分类号　P312.1

磁性和密度界面的传统反演方法都要求界面平均深度比界面起伏大得多，60—70 年代盛行的最优化法是一种非线性解法，但由于多解性使得该法的应用受到一定的限制。此后，约束条件下的最优化求解磁性界面深度方法出现，在一定程度上解决了上述问题(陈钟琦等，1991)，然而这种约束解也存在初值和特征点的选定问题。Parker(1973)首次提出频率域的重力正演式，为密度界面深度分布的重力非线性频率域反演提供了理论依据，并形成了 Oldenburg 重力非线性反演法(Oldenburg, 1974)，而且相继有多种变密度界面反演式被推导出来(柴玉璞等，1990)。张贵宾等(1996)提出了改进的正则化稳定因子反演算法，又在一定程度上改进了频率域位场反演的迭代收敛性能。但是，以 Parker 公式为基础的重磁反演法都存在一个 Δh 幂次的选取问题，且在磁性界面深度求解上目前也只适用于垂直磁化条件下的垂直磁异常情况。

重磁异常反演(物性反演除外)从根本上讲是一个解非线性积分方程的问题。如果能直接将被积函数展成界面起伏变化 Δh 的线性项及余项的函数(Parker 是在间接的频率域基础上找到了这种关系)，那么，就可以参照 Fredholm 第一类积分方程的数值解法迭代求解 Δh。这实际上是一种直接解法，它既可以避免频率域解法中多次调用付氏变换带来的积累误差，又可以改进空间域线性解法忽略余项即高次项的误差。本研究正是沿着这条思路进行的。

* 国家自然科学基金资助项目，49274212号。王硕儒，男，出生于1934年12月29日，教授，E-mail: pxdjiang@public. qd. sd. cn

收稿日期：1998-08-23，收修改稿日期：2000-01-26

1 原理

1.1 重磁异常反演式

磁性界面的二维磁位异常为

$$u(x,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}J\frac{\partial}{\partial t}\int_{\xi}\int_{h}^{h+\Delta h(\xi)}\ln[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta \tag{1}$$

对于垂直磁异常

$$Za(x,z)=\frac{\mu_0}{4\pi}\;J\frac{\partial}{\partial t}\int_{\xi}\ln\frac{(x-\xi)^2+[z-h-\Delta h(\xi)]^2}{(x-\xi)^2+(z-h)^2}\;\mathrm{d}\xi$$

不难证明，只要 $|\Delta h|<(\sqrt{2}-1)(h-z)$，上式被积函数可展成$\Delta h$的幂级数形式。合并$\Delta h$的幂次项得

$$\ln\left[1+\frac{2(h-z)\Delta h(\xi)+\Delta h^2(\xi)}{(x-\xi)^2+(z-h)^2}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Delta h^k(\xi) \tag{2}$$

式中 a_k，当 $k=1$ 时　$a_1=\dfrac{2(h-z)}{(x-\xi)^2+(h-z)^2}$，

当 $k=2$ 时　$a_2=\dfrac{(x-\xi)^2-(h-z)^2}{(x-\xi)^2+(h-z)^2}$，……。

由此，当 $z=0$ 时

$$Za(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\;J\int_{\xi}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha A_k+\gamma B_k)\Delta h^k(\xi)\mathrm{d}\xi$$

而式中 A_k、B_k，当 $k=1$ 时

$$A_1=\frac{4(\xi-x)h}{[(x-\xi)^2+h^2]^2}\;,\;B_1=\frac{2[h^2-(x-\xi)^2]}{[(x-\xi)^2+h^2]^2}\;,$$

当 $k=2$ 时　$A_2=\dfrac{6(x-\xi)h^2-2(x-\xi)^3}{[(x-\xi)^2+h^2]^3}$，$B_2=\dfrac{6(x-\xi)^2h-2h^3}{[(x-\xi)^2+h^2]^3}$，……

式中α、γ分别为磁化强度$\vec{J}$在 x 与 z 方向的方向余弦。

又因为

$$Za(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\;J\int_{\xi}\left\{\alpha\left[\frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2+[h+\Delta h(\xi)]^2}-\frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2+h^2}\right]\right.$$
$$\left.+\gamma\left[\frac{2h}{(x-\xi)^2+h^2}-\frac{2[h+\Delta h(\xi)]}{(x-\xi)^2+[h+\Delta h(\xi)]^2}\right]\right\}\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

故 $Za(x)$可以写成

$$Za(x)-g(\Delta h(\xi))=\int_{\xi}A(x,\xi)\Delta h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

其中

$$A(x,\xi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\;J(\alpha A_1+\gamma B_1)$$

而 $g(\Delta h(\xi))$ 为 $\Delta h(\xi)$ 的二次项及其以上各项对磁异常的贡献。由于它相对于一次项的贡献要小得多,即 $g(\Delta h(\xi))$ 与 $Za(x)$ 相比是(按 $\Delta h=\max[\Delta h(\xi)]$)高二阶无穷小,故(3)式是非线性程度较小的特殊非线性积分方程,用简单迭代法就可以把问题化成相应的线性方程求解,即

$$\begin{cases} Za(x) = \int_{\xi} A(x,\xi)\Delta h_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ Za(x) - g(\Delta h_{j-1}(\xi)) = \int_{\xi} A(x,\xi)\Delta h_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{5}$$

式中 $g(\Delta h_{j-1}(\xi))$ 为第 $j-1$ 次迭代求得的 $\Delta h_{j-1}(\xi)$ 值代入式(3)计算的正演异常减去 $\int_{\xi} A(x,\xi)\Delta h_{j-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 所得的值,即(2)式中非一次项产生的异常。

同理,因为

$$\Delta T(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\xi}\left[2\alpha^2\left(\frac{h+\Delta h(\xi)}{r^2}+\frac{h}{r_1^2}\right)\right.$$

$$\left. + 4\alpha\gamma\left(\frac{x-\xi}{r_1^2}-\frac{x-\xi}{r^2}\right)+2\gamma^2\left(\frac{h}{r^2}-\frac{h+\Delta h(\xi)}{r_1^2}\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

而其近似线性项为

$$\Delta T(x) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi} J \int_{\xi}\left[2\alpha^2\,\frac{h^2-(x-\xi)^2}{r^4}\right.$$

$$\left. + 8\alpha\gamma\frac{(x-\xi)h}{r^4}+2\gamma^2\frac{(x-\xi)^2-h^2}{r^4}\right]\Delta h(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

其中 $r=[(x-\xi)^2+h^2]^{1/2}$, $r_1=\{(x-\xi)^2+[h+\Delta h(\xi)]^2\}^{1/2}$,写成计算 $\Delta h(\xi)$ 的迭代式如下:

$$\begin{cases} \Delta T(x) = \int_{\xi} B(x,\xi)\Delta h_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ \Delta T(x) - H(\Delta h_{j-1}(\xi)) = \int_{\xi} B(x,\xi)\Delta h_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{cases} \tag{6}$$

式中 $H(\Delta h_{j-1}(\xi))$ 仍为 $j-1$ 次迭代后的高次项影响部分。

以上是对磁异常求界面分布的讨论,对于重力异常,变密度界面的求解,特别是纵向、横向都变化的密度界面的反演,更具有实际意义。

设 $\sigma(\xi,\zeta)=a\zeta^2+b\xi+c$,由该密度界面引起的二维重力异常为

$$\Delta g(x) = 2f\int_{\xi}\int_{h}^{h+\Delta h(\xi)} \frac{(\alpha\zeta^2+b\xi+c)\zeta}{(x-\xi)^2+\zeta^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta$$

在 $|\Delta h|<(\sqrt{2}-1)h$ 的条件下可展开成

$$\Delta g(x) = f\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\xi}\mathrm{d}_k(\xi,\ x)\Delta h^k(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{7}$$

式中 $d_k(\xi,\ x)$,当 $k=1$ 时为

$$d_1(\xi,\ x) = [b\xi+c-a(\xi-x)^2]\frac{2h}{(x-\xi)^2+h^2}+2ha\ ,$$

当 $k=2$ 时为

$$d_2(\xi,\ x)=[b\xi+c-a(\xi-x)^2]\frac{(x-\xi)^2-h^2}{[(x-\xi)^2+h^2]^2}+a$$

……。

因为(7)式是由

$$\Delta g(x)=f\int_\xi\left\{[b\xi+c-a(\xi-x)^2]\ln\frac{(x-\xi)^2+[h+\Delta h(\xi)]^2}{(x-\xi)^2+h^2}+a[2h\Delta h(\xi)+\Delta h^2(\xi)]\right\}\mathrm{d}\xi \quad (8)$$

展开而来，故依据与磁异常相同的理由，解界面起伏$\Delta h(\xi)$又成为了迭代求解以下线性积分方程的问题：

$$\begin{cases}\Delta g(x)=\int_\xi D(\xi,x)\Delta h_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ \Delta g(x)-G[\Delta h_{j-1}(\xi)]=\int_\xi D(\xi,x)\Delta h_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{cases} \quad (9)$$

式中 $D(\xi,x)=fd_1(\xi,\ x)$，$G[\Delta h_{j-1}(\xi)]$为第 $j-1$ 次迭代求得的$\Delta h_{j-1}(\xi)$值代入(8)式计算的正演异常减去$\int_\xi D(\xi,x)\Delta h_{j-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$所得的值。

1.2　B 样条函数解积分方程

以(6)式为例。取三次 B 样条

$$F(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}F_i N_{3,i-2}(x)$$

$$H(\xi)=\sum_{j=-1}^{n+1}H_j N_{3,j-2}(\xi)$$

$$B_0(x,\xi)=\sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{n+1}B'_{ij}N_{3,i-2}(x)N_{3,j-2}(\xi)$$

分别近似代替式中$\Delta T(x)$,$\Delta h(\xi)$和 $B(x,\xi)$，从而得

$$F(x)=\int_\xi B_0(x,\xi)\,H(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

比较 $N_{3,i-2}(x)$的系数，得关于 $H=(H_{-1},\ H_0,\ \cdots\cdots H_n,\ H_{n+1})^T$的线性代数方程组

$$F=B\cdot H \quad (10)$$

式中

$$B=(b_{ij})_{(n+3)\times(n+3)}$$

而

$$b_{ij}=\sum_{l=-1}^{n+1}B'_{il}\alpha_{lj}$$

$$\alpha_{ij}=\int_\xi N_{3,i-2}(\xi)\,N_{3,j-2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

在整个计算过程中，二维插值系数 B'_{ij}的计算是影响算法速率的关键。可以证明，B'_{ij}所表示的矩阵 B' 与 $B_0(x,\xi)$所表示的矩阵 B_0之间关系为

$$B'=N^{-1}(\xi)\cdot B_0\cdot N^T(x)^{-1} \quad (11)$$

式中 $N^{-1}(\xi)$，$N^{T}(x)^{-1}$分别代表基样条 $N_{3,j-2}(\xi)$所表示的矩阵 $N(\xi)$的逆矩阵和 $N_{3,i-2}(x)$所表示的矩阵 $N(x)$的转置矩阵的逆矩阵。这种解法比常规的直接按二维样条式求解速度要快得多，简便得多。

(10)式方程求解的 H(即Δh_0)代入(6)式中的高次项(非线性项)作样条数值积分，再解线性代数方程，又可计算出Δh_1值。如此反复，直至上、下两次$\Delta h(\xi)$之差满足误差要求。

2 研究结果

2.1 剖面模拟反演与对比

笔者对磁性界面和重力密度界面都进行了模型试算，此处仅列出磁性界面反演模型，重力密度界面反演模型效果可从与 Parker 公式的对比试算中看出。

2.1.1 磁性界面反演模型　图 1 中磁性界面模型参数为 $J=2\,000\times10^{-3}$A/m，基准深度 $h=20$km，有效磁化倾角 30°。剖面由 41 个测点(点距 30km)组成，界面与剖面同坐标分划，迭代 26 次，反演结果与实际模型的均方差为 4×10^{-3}km，拟合很好，而采用线性方法近似求解的误差是相当明显的。

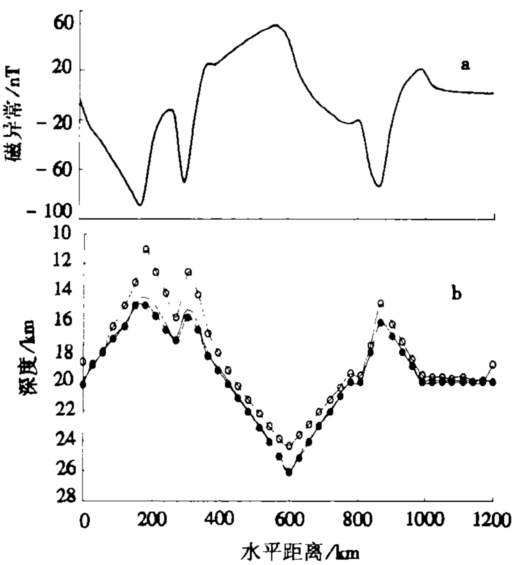

图1 磁性界面模型ΔT反演结果

Fig.1 Result for the magnetic interface of ΔT inversion

——标准模型；—●—非线性反演；—○—线性反演

a 磁异常； b 界面模型

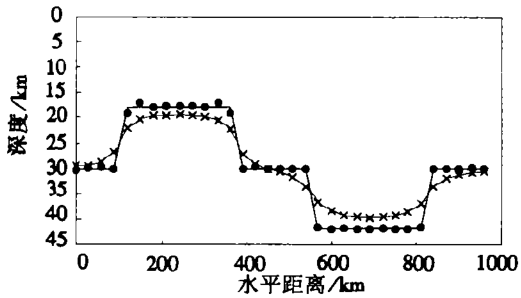

图2 本方法与Parker公式反演法的对比

Fig.2 Comparison between results of this method and Parker's formula method

——标准模型；—×—Parker公式结果；●样条结果

2.1.2 模型计算与 Parker 方法的对比　图 2 所示是一密度界面模型$\sigma=-0.42$。条件选择为：点距 30km，32 个测点，基准深度 $h=30$km，Δh 取 4 阶值，迭代 3 次。从图 2 可明显看出本方法的误差小于 Parker 法。

2.2 重力反演实例

南海海域的布格异常图(刘祖惠等，1981)[1)](图 3)在东沙群岛一带由于重力等值线(mgal)呈北东—南西构造线分布，故取 BB'剖面作二维莫霍面反演。根据一般情况的地壳、地幔密度值，取$\sigma=-0.43$，基准深度 $h=20$km，点距 30km，界面、测线分划相同。控制前后两次计算深度的均方差为 0.23km，迭代 4 次，误差即满足要求，均方差为 9.1×10^{-2} km。计算结果如图 4 所示。图中还附上了中国科学院南海海洋研究所用 $\sin(x)/x$法计算

1) 刘祖惠，王启玲，1981. 南海海域布格重力异常图及莫霍面等深图

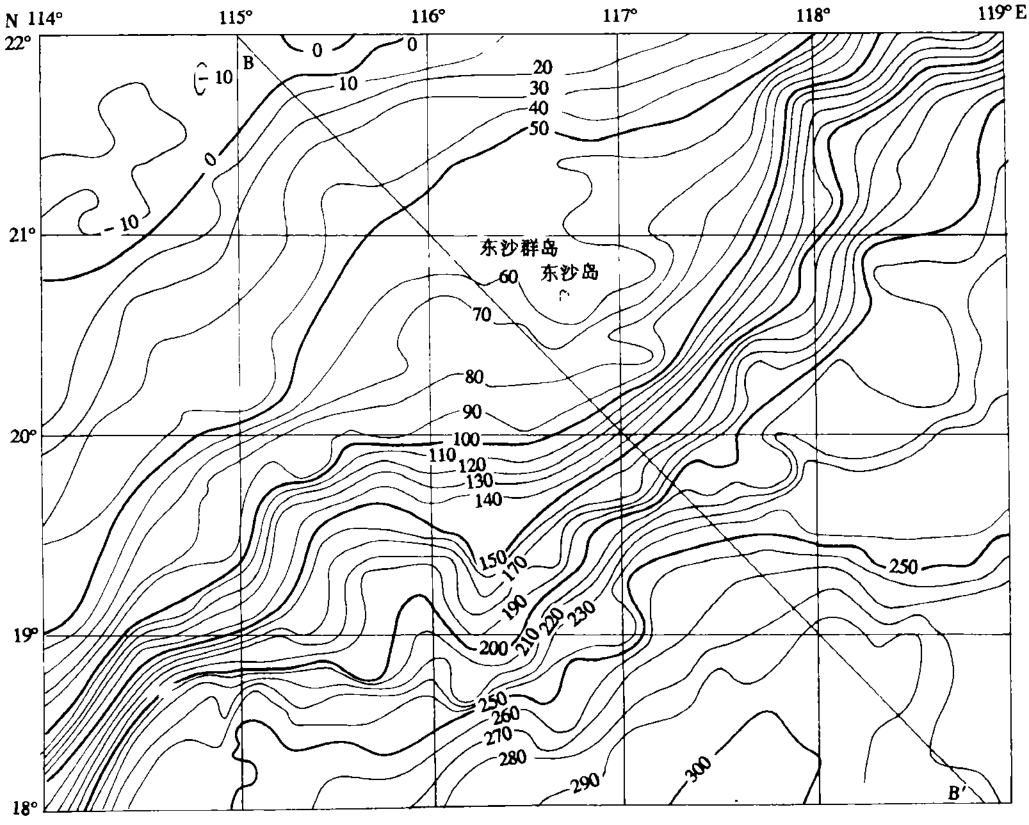

图3　南海海域布格异常图

Fig.3　Map of Bouger anomaly over a portion of the South China Sea

的深度曲线。该所取“h = 10.8km 为基准点，从 4 个已知深度点看，认为在深海取得了较满意的结果”(刘祖惠等，1981)。我们的反演结果正好在深海与之符合很好，浅海区不太符合，可能与这里地壳的非均匀性有关。

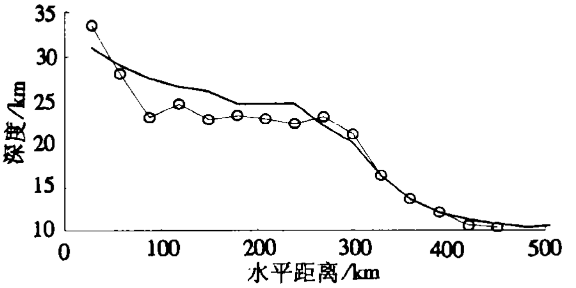

图4　剖面反演结果与sin(x)/x法结果比较

Fig.4　Comparison between results of the inversion by this method and by sin(x)/x method

——sin(x)/x 法结果；—○— 样条结果

3　结语

3.1　本文的讨论虽限于二维剖面的理论和计算，但对三维异常方法原理是相同的，在 $|\Delta h| < (\sqrt{2}-1)h$ 的条件下仍可将被积函数展成Δh的幂级数，从而形成解二维线性积分方程的问题。在用 B 样条求解时，需要的不仅是二维插值系数，还要计算四维插值系数，且边界条件至少要从二阶微商增至四阶微商，实现时可按类似二维问题做矩阵分块运算。

3.2　本方法解决的是界面起伏，但实际上求解的是地质体上、下界面起伏之差，因而完全

可能用它来确定地质体厚度分布。在一定条件下也能解决地质体的几何形态分布问题。

3.3 我们所提出的空间域求解物性界面分布的思路和方法，在迭代中考虑了线性项以外整个余项(当然也可以是有限余项)的影响，不象频率域的 Parker 公式那样只能考虑有限项的影响，因而不存在忽略高次项所带来的误差。加之 B 样条灵活、统一的特点，用它解积分方程，区间可以随意分划。

参 考 文 献

陈钟崎，金福汀，1991．确定磁性界面深度的广义变分原理和计算方法．物化探计算技术，13(2)：148—157

张贵宾，申宁华，1996．频率域位场快速正则化反演界面和物性分布．长春地质学院学报，26(4)：434—440

柴玉璞，贾继军，1990．Parker 公式的一系列推广及其在石油重力勘探中的应用前景．石油地球物理勘探，25(3)：321—332

Parker K L, 1973. The rapid calculation of potential anomalies. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 31: 447—455

Oldenburg D W, 1974. The inversion and interpretation of gravity anomalies. Geophysics, 39(4): 526—536

NONLINEAR ITERATIVE INVERSION OF GRAVITY AND MAGNETIC INTERFACES TO TWO DIMENSIONAL ANOMALIES BASED ON B SPLINE FUNCTION

WANG Shuo-ru, YU Zeng-hui[†]

(*Department of Marine Geoscience, Ocean University of Qingdao, Qingdao*, 266003)

[†](*Institute of Oceanolgy, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao*, 266071)

Abstract Inversion of gravity and magnetic interfaces by gravity and magnetic anomalies, which demonstrates the distribution of subterranean materials, is an important realm in geophysics. In this realm, the common methods are based on Parker formula in frequency domain. For these methods there is the problem of choosing the power number of the relief of interfaces Δh, and to magnetic interfaces they are only applicable under the condition of perpendicular magnetization. In order to avoid the errors caused by frequent Fourier transferring in frequency domain and by omitting the higher power items for linear solutions in space domain, in this article a new nonlinear iterative solution in space domain is presented. It solves the integral equation based on simple and flexible B spline. When the relief of interfaces Δh is in $|\Delta h| < (\sqrt{2} - 1)h$, the effect of the higher power items is considered commonly, whereas it is omitted by other methods. Models and examples show that this method is better than Parker's formula method and the linear solution in space domain.

Key words Inversion of gravity and magnetic interfaces Nonlinear integral equation Interative B spline function

Subject classification number P312.1