

随机波面概率统计中的动力学应用*

侯 筠 李明悝 谢 强 尹宝树 苏京志 杨联贵

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

提要 通过构造带有随机初条件的微分方程, 论述了在线性海浪范围内动力学与统计学的协调性, 然后把水波动力学中的研究成果引进随机波面统计中获得了非线性波面的概率分布形式, 并由浅水因子和浅水波陡作为分布函数中的控制参量, 从而发展了随机海浪的统计理论。

关键词 波浪 动力学 统计学

学科分类号 P731

研究波浪通常采用两种主要方法, 一种是动力学方法, 另一种是统计学方法, 前者的数学基础是微分方程, 后者的数学基础是随机过程(文圣常等, 1984)。用动力学方法研究波浪有着辉煌的历史, 它一直伴随流体力学的发展而发展。水波的三大方程(非线性耗散波的代表: Burges 方程; 非线性色散波的代表: KdV 方程; 非线性调制波的代表: Schrodinger 方程)就是该领域内最具代表性的贡献(Jeffrey *et al.*, 1982)。随机过程理论应用于波浪研究始于本世纪 40 年代。经过半个世纪的发展, 它的两个主要方面: 即波浪要素的统计分布和海浪谱, 均已取得相当令人瞩目的成果, 并在应用中已取得重大效益。

事实上, 人们已经注意到, 将波浪动力学理论与观测资料结合起来, 带有较强的经验性质, 而在波浪统计学的研究中又缺乏与动力学结合的方法, 尽管孙孚等(1994)等从理论上提出了由水波控制方程来确定分布参数的统计模型, 但因其结果均涉及高阶谱, 仍不能从动力学中去计算分布的有关参数, 故无法直接反映动力学因素。为此, 本文试图将波浪动力学研究中的 Stokes 波理论应用到波浪的统计模式中, 并提出波浪的非线性概率分布形式。

1 模式的建立

在海浪统计方法研究中, 经典的处理方法是视海浪过程为无数个独立随机变量之和:

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \quad (1)$$

其中, t 为时间; $\zeta(t)$ 为固定点随时间变化的波面; a 为振幅; ω 为圆频率; ε 为 $0-2\pi$ 范围内均匀分布的随机位相(Longuet-Higgins, 1957)。由中心极限定理可推出随机波面服从高斯分布, 其他一些重要分布(如波高、周期等)则可由此导出。

* 国家自然科学基金资助项目, 49876007 号; 中国科学院九五重点项目, KZ952-S1-420 号; 国家 863 资助项目, 818-06-01 号。侯一筠, 男, 出生于 1956 年 11 月, 博士, 博士生导师, 研究员, 青岛海洋大学物理海洋实验室兼职教授, 国家海洋局一所客座研究员, E-mail: yjh@ms.qdio.ac.cn

收稿日期: 1999-04-23, 收修改稿日期: 2000-02-29

另一方面, 海浪的运动规律须符合动力学原理, 应受到控制方程及初始条件支配, 模式(1)也应体现这一特征。为此, 可通过一个简单的随机动力模式进行论述。事实上, 对线性重力波, 经分离变量后, 关于时间的微分方程为:

$$\zeta_n''(t) + \omega_n^2 \zeta_n(t) = 0 \tag{2}$$

故只要取随机初始条件为:

$$\begin{cases} \zeta_n(0) = a_n \cos \epsilon_n \\ \zeta_n'(0) = -a_n \omega_n \sin \epsilon_n \end{cases} \tag{3}$$

则上述随机微分方程的解就是式(1)中的每一分波。这就说明了, 在线性海浪范围内, 波浪统计学与动力学理论是协调的。而式(3)可看作是海浪与外界作用而得到的初始信息。

在海浪的统计学研究中, 另一常用的假设是视随机海浪为窄带谱过程, 它实际上是将波面 $\zeta(t)$ 表示成: $\zeta(t) = a(t) e^{i(\omega t + \epsilon(t))}$ 的形式 (Longuet-Higgins, 1975)。它体现了振幅和位相受时间的缓慢调制, 如前言所述, 它必符合 Schrodinger 方程中振幅关于时间的演化方式。而在缓变振幅与位相的近似下, 它亦满足类似于(2)的方程, 故只要振幅与位相的初始信息分别为服从瑞利分布和均匀分布的随机量, 则由概率论知识, $\zeta(t)$ 必为高斯过程。

以上分析表明, 在线性海浪范围内, 波面统计模式可通过构造带有随机初始条件的微分方程来实现, 同时也能够加深对波浪的确定性与随机性对立统一的理解。然而, 线性海浪只是对客观事物的一种近似描述, 大量的事实表明, 非线性效应是一重要的现象。为此, 许多作者提出了很多方法(孙孚等, 1994; Tayfun, 1980) 来研究非线性海浪的统计模式, 并且取得一些有益的成果, 但仍如前言所述, 在统计模式中, 尚缺乏动力学因素。在这方面出现的困难主要有两点: 一是物理上的建模; 二是数学上的求解。本文则根据非线性海浪的一个重要表现特征, 利用在动力学研究中已取得的能反映这一特征的成果, 提出非线性海浪的统计模式。

事实上, 海浪的一个重要表现特征是, 波谷相对较平, 而波峰相对较陡, 在动力学理论中能反映这一现象的正是 Stokes 波 (Rayleigh, 1917), 由此固定点随时间变化的波面可表示为:

$$\zeta(t) = a e^{k\zeta(t)} \cos(\omega t + \epsilon) \tag{4}$$

其中, k 为波数, 它通过色散关系与 ω 相联系。与经典 Stokes 波不同之处, 就在于(4)式中将含有随机信息项。利用波面方差 σ 可对上式无因次化, 即令 $\zeta = \alpha \zeta^*$, $a = \alpha a^*$, 代入(4)式, 去掉“*”号后, 有: $\zeta(t) = a e^{\delta \zeta(t)} \cos(\omega t + \epsilon)$

式中, $\delta = \alpha k$ 为波陡。由(5)式得出: $\zeta_0 = \zeta|_{\delta=0} = a \cos(\omega t + \epsilon)$

$$\tag{6}$$

(6)式为线性海浪过程, 其分布为高斯型: $f(\zeta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta_0^2}{2}}$

$$\tag{7}$$

由(5), (6)可得 $\zeta = \zeta_0 e^{\delta \zeta}$ 或: $\zeta_0 = \zeta e^{-\delta \zeta}$

$$\tag{8}$$

(8)式建立了非线性海浪过程与线性之间的联系, 特别以波陡作为控制参量。 ζ 的分布函数为:

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) \left| \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |1 - \delta \zeta| e^{-\delta \zeta} e^{-\frac{1}{2} \zeta^2 e^{-2\delta \zeta}} \tag{9}$$

从(9)式看出这是一个完全由初等函数表示的波面分布。它既避免了 Gram-Charlier 型分布中由 Hermite 多项式所带来的负概率事件 (Longuet-Higgins, 1963), 又比 Tayfun

(1980) 由积分定义分布简单。当 $\delta=0$, 即略去非线性效应时, (9) 式退化为高斯分布, 而当 $\delta>0$, 且逐渐增大时(表明非线性增强), (9)式偏离高斯分布的趋势也与传统结果一致(图 1)。

2 受水深影响的波面分布

在波浪的动力学研究中, 水深 H 通常是一个重要参量, 浅水波与深水波有着显著不同的动力学性质。另一方面, 随着水深的变小, 浅水波陡 η (定义为波高与水深之比) 是控制波形变化的另一个重要参量。然而, 到目前为止的关于随机波要素的概率统计中, 仅在通过经验拟合的分布里才出现过上述参量。在许多应用问题中, η 不是小量, 它必将对波面分布产生重要影响。为此, 类似于上节关于深水情形的处理, 并参照佐藤清一(1954)对有限水深 Stokes 波的研究结果, 取固定点随时间变化的波面为:

$$\zeta = a \sinh k(H + \zeta) \cos(\omega t + \varepsilon) \tag{10}$$

仍以方差 σ 无因次化后, 有: $\zeta = a \sinh[\mu(1 + \eta\zeta)] \cos(\omega t + \varepsilon) \tag{11}$

式中, $\mu = kH$ (通常称为浅水因子); $\eta = \frac{\sigma}{H}$ 分别为水波动力学中反映水深与非线性效应的

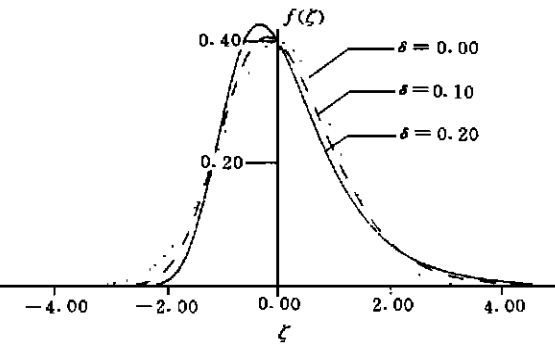


图 1 非线性波面分布随波陡 δ 的变化, 其中 $\delta=0$ 为高斯分布

Fig. 1 The nonlinear distribution of wave with the wave steepness δ , where $\delta=0$ standing for Gaussian distribution

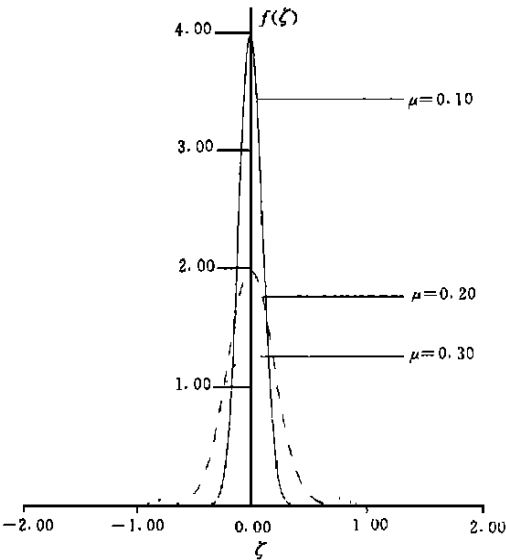


图 2 浅水波面分布随浅水因子(μ)的变化
Fig. 2 The distribution of wave in shallow water with the parameter of shallow water (μ)

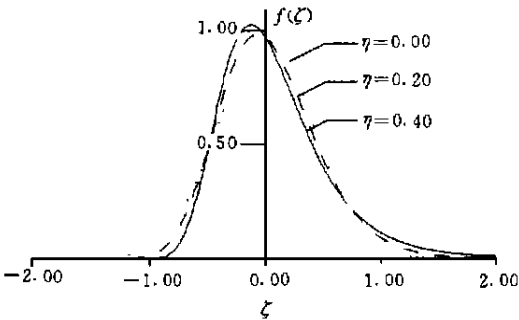


图 3 浅水因子固定时, 非线性波面分布随浅水波陡 η 的变化 (其中 $\eta=0$ 为高斯分布)

Fig. 3 When the parameter of shallow water constant, the nonlinear distribution of wave with the wave steepness of shallow water η , where $\eta=0$ standing for Gaussian distribution

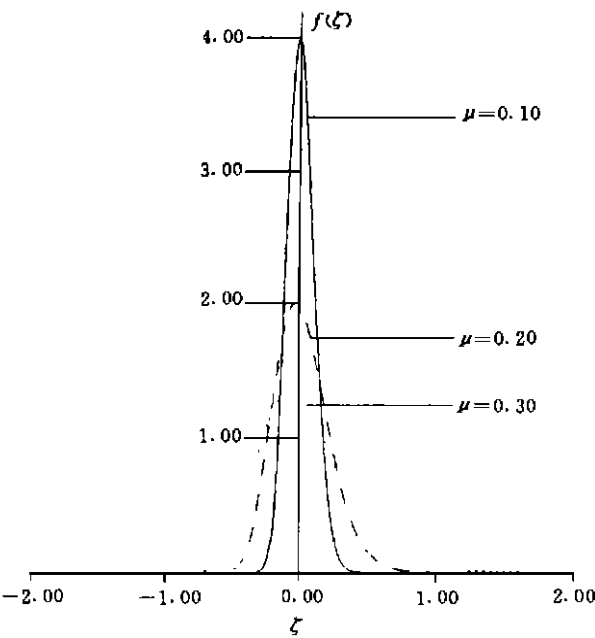


图 4 浅水波陡固定时,非线性波面分布随浅水因子(μ)的变化

Fig. 4 When the wave steepness of shallow water constant, the nonlinear distribution of wave with the parameter of shallow water (μ)

重要参量。由(11)式得出

$\zeta = \zeta_0 \sinh[\mu(1 + \eta\zeta)]$ 或

$$\zeta_0 = \frac{\zeta}{\sinh[\mu(1 + \eta\zeta)]} \tag{12}$$

在水深影响下的波面分布为:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{1 - \mu\eta\zeta \coth[\mu(1 + \eta\zeta)]}{\sinh[\mu(1 + \eta\zeta)]} \right| e^{-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{2\sinh^2[\mu(1 + \eta\zeta)]}} \tag{13}$$

从(13)式可以看出,水波动力学中的两个重要参数 μ 和 η 也是波面统计分布中的重要参数。当 $\eta = 0$ 时,上式可简化为:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sinh\mu}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sinh^2\mu}} \tag{14}$$

这是受水深影响的高斯分布,随着 μ 的减小,分布较集中(图 2),说明浅水中的波浪成分较深水为少,在物理上颇为合理。当 μ 一定时,随着 η 增

大,(13)式偏离高斯分布的趋势同深水情形一致(图 3)。考虑到 $\delta = \mu\eta$,可知受水深影响的非线性波面分布仍同传统结果相似。此外,当 η 一定时,随着 μ 的变化,(13)式的变化趋势类似于(14)式(图 4)。这些都反映了把动力学结果引入到随机波概率统计研究中的合理性。

3 结语

把动力学中的有益结果应用于随机波研究中可以提出新的波浪概率统计模式,特别是在非线性研究方面,优点更为明显。由本文的结果可以看出,波陡不仅是波浪动力学中的重要参量,而且是统计学中的重要参量,波陡的大小既能体现波面分布偏离高斯分布的程度,又可做为控制参量描述分布函数的变化。除了偏度外,分布函数形式的另一个特点是集中或分散的程度,传统的高斯分布经无因次化后的标准形式无论在何种水深条件下均一样,而本文通过对受水深影响波面分布的研究获得了在物理上合理的函数形式,即浅水波陡描述分布函数的偏度,浅水因子刻划了分布函数集中或分散的程度,这就从理论上丰富了传统的海浪统计理论。我们将另文做出理论结果与现场实测的比较以及与其他作者的结果对照。

致谢 在研究过程中曾得到物理海洋教育部重点实验室和国家海洋局海洋环境科学和数值模拟重点实验室的大力支持,特此致谢。

参 考 文 献

- 文圣常, 余宙文, 1984. 海浪理论与计算原理. 北京: 科学出版社, 31—54, 127—193
- 孙 孚, 丁平兴, 1994. 非线性海浪的波面高度概率分布及其物理解释. 中国科学, B 辑, 24(8): 859—865
- 佐藤清一(Sato, S.), 1954. Surface waves in shallow water. J Res. P W R I, Vol. 1, 日本建设省土木研究所报告, 1—111
- Jeffrey A, Kawahara T, 1982. Asymptotic methods in nonlinear wave theory. Boston: Advanced Publishing, 1—378
- Longuet- Higgins M S, 1957. The statistical analysis of a random moving surface. Phil Trans Roy Soc A, 249(966): 321—387
- Longuet- Higgins M S, 1963. The effect of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves. J Fluid Mech, 17(3): 459—480
- Longuet- Higgins M S, 1975. On the joint distribution of the period and amplitudes of sea waves. J Geophys Res, 80(18): 2688—2694
- Rayleigh L, 1917. On periodic irrotational waves at the surface of deep water. Phil Mag, 33: 381—389
- Tayfun M A, 1980. Narrow-band nonlinear sea waves. J Geophys Res, 85(C3): 1548—1552

THE APPLICATIONS OF DYNAMICS IN PROBABILITY STATISTICS OF RANDOM WAVE SURFACE

HOU Yi- jun, LI Ming- kui, XIE Qiang,

YIN Bao- shu, SU Jing- zhi, YANG Lian- gui

(Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao, 266071)

Abstract Applying some results of dynamics such as Stokes wave to the study of random waves, we obtained a new model of probability statistics of waves:

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) \left| \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |1 - \delta\zeta| e^{-\frac{\zeta^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2 e^{-2\delta\zeta}}$$

The excellence of the model is more notable in the study of nonlinear phenomena. According to the results of the article, the wave steepness is an important parameter not only in dynamics but also in statistics. And the magnitude of the wave steepness is able to show the degree that the distribution of wave surface deviates from the Gaussian distribution and to describe the change of the distribution function as a control parameter. The normal form of the traditional Gaussian distribution keeps the same form in any kind of depth, but the distribution function can describe the degree of the convergence or decentralization. This is another significance of the distribution besides the degree of deflection. We got a function form which is valid in physics by the study of the distribution of wave surface that is influenced by water depth:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{1 - \mu\eta\zeta \coth[\mu(1 + \eta\zeta)]}{\sinh[\mu(1 + \eta\zeta)]} \right| e^{-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{2s \sinh^2[\mu(1 + \eta\zeta)]}}$$

We can learn that the wave steepness of shallow water describes the degree of deviation and the parameter of shallow water shows the degree of the convergence or decentralization. These could improve the traditional statistical theory of waves.

Key words Wave Dynamics Statistics

Subject classification number P731