

极坐标变换变边界模型及其应用*

史峰岩 孙文心

(青岛海洋大学物理海洋研究所, 青岛 266003)

提 要 Johns 变边界模型用于海湾海域风暴潮漫滩计算时, 由于岸界弯曲较大, 而影响了计算的稳定性和精度, 本文针对这个问题, 导出了极坐标下的连续移动边界模型, 从而改善了对岸界弯曲较大海域的风暴潮漫滩计算。通过对 1969 年黄河口沿岸一带水域风暴潮漫滩的模拟, 证明这种极坐标变边界模型用于海湾海域的风暴潮漫滩计算, 优于 Johns 变边界模型。

关键词 浅海动力学 风暴潮 漫滩 变边界模型 极坐标方程

对于滩涂较大、风暴潮灾严重的海域风暴潮数值计算, 一般要用可变边界模型, 这不仅符合实际的流体动力学过程, 而且可以给出风暴潮受灾范围。作者(1993)曾采用 Johns (1982) 运动边界坐标变换模型, 对发生于 1964 年、1969 年两次较大渤海风暴潮黄河口沿岸一带的漫滩过程进行了数值模拟, 证实了 Johns 坐标变换变边界模型应用于海湾水域的可行性。这种模型应用了流体力学中运动边界的原理, 实现了岸界的连续移动, 从理论上比那种通过干湿点判断而实现岸界不连续移动的“瞬时垂直壁”模型 (Flather et al., 1975; Leendertse et al., 1971) 更为合理。但这种模型要求所选取的坐标轴 y 轴方向 (基线方向) 与岸界切线的夹角不能太大, 否则会出现计算的不稳定或影响计算的精度。Johns 模型中的解决方法是适当选定坐标轴方向, 使海岸线的大致走向与基线方向基本一致。这样通过缩小时间步长基本上保证了计算的稳定性。但对于个别海岸线弯曲程度较大的区域, 由于海岸线与基线的夹角过大或移动岸界的坐标值可能出现多值而得不到理想的结果。所以对于海湾水域的风暴潮漫滩计算, 用直角坐标系下的 Johns 模型并不甚理想。如果选用极坐标, 利用极坐标弧线与海湾岸界较为吻合的优势, 在很大程度上解决了这一问题。本文首先从极坐标系下的二维深度平均流体动力学方程组出发, 推导出坐标变换后对应于象平面中的方程组。为了与 Johns 模型的结果比较, 在模型海域进行了数值试验, 最后模拟了 1969 年黄河口附近海域的风暴潮漫滩过程, 并分别与实测值、Johns 模型的结果进行了比较。

1 极坐标下运动边界坐标变换模型

在如图 1a 所示的凸形海湾区域建立极坐标系。岸界位于 $r = b_1(\theta, t)$, 三个开边值位于 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = b_2(\theta)$ 。极坐标系中的二维平均流速方程组为:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ruH}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial vH}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助项目, 49070255 号。史峰岩, 男, 出生于 1964 年, 博士。

收稿日期: 1993 年 12 月 5 日, 接受日期: 1994 年 5 月 2 日。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{H\rho} (\tau_r - k\rho u \sqrt{u^2 + v^2}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + fu = -g \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{H\rho} (\tau_\theta - k\rho v \sqrt{u^2 + v^2}) \quad (3)$$

岸边边界条件 $r = b_1(\theta, t): u = \frac{\partial b_1}{\partial t} + \frac{v}{b_1} \frac{\partial b_1}{\partial \theta}$

水边界条件 $r = b_2(\theta)$
 $\theta = \theta_1 \quad \zeta = \zeta^*$
 $\theta = \theta_2$

上式中, r, θ 为极坐标; u, v 分别为 r, θ 方向深度平均流速分量; ζ 为未扰动海面以上的水位高度, $H = h + \zeta$; τ_r, τ_θ 分别代表 r 方向和 θ 方向表面风应力; ζ^* 为开边界处抄自大区计算的水位。

对方程(1)–(3)做数学变换 $\xi = \frac{r - b_1(\theta, t)}{b(\theta, t)} \quad (4)$

(4)式中 $b(\theta, t) = b_2(\theta) - b_1(\theta, t)$ 。这样, 方程(1)–(3)变为象平面 (ξ, θ) 中的(5)–(7)式:

$$\frac{\partial Hb}{\partial t} + \frac{\partial bHU}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v^*}{b\xi + b_1} \right) + \frac{u^*}{\xi b + b_1} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{\partial u^*U}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{vu^*}{b\xi + b_1} \right) + \frac{uu^* - vv^*}{b\xi + b_1} - fv^* \\ = -Hg \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{b\tau_r}{\rho} - \frac{k u^*}{H} \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} + \frac{\partial v^*U}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{vv^*}{b\xi + b_1} \right) + \frac{2uv^*}{b\xi + b_1} + fu^* \\ = -Hg \frac{1}{\xi + b_1/b} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \frac{\xi b'_\theta + b'_{1\theta}}{b} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{b\tau_\theta}{\rho} - \frac{k v^*}{H} \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (7)$$

岸边边界条件 $\xi = 0: U = 0; H = 0$

水边界条件 $\xi = 1$
 $\theta = \theta_1 \quad \zeta = \zeta^*$
 $\theta = \theta_2$

(5)–(7)中,

$$\begin{aligned} u^* &= bHu \\ v^* &= bHv \end{aligned} \quad (8)$$

$$bU = u - (1 - \xi)b'_1 - \frac{v(\xi b'_\theta + b'_{1\theta})}{\xi b + b_1}$$

对方程(5)–(7)的积分, 采取半隐半显有限差分方法, 并使用空间交错网格(如图 1b)。

运算符号定义如下: $(\xi, \theta, t) = [(i-1)\Delta\xi, (j-1)\Delta\theta, (p-1)\Delta t]$ 。其中 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; p = 0, 1, 2, \dots$ 。对于任一变量 F 写成 $F(\xi_i, \theta_j, t_p) = F_{i,j,p}$, 差分算符和平均算符定义为:

$$\Delta_t F = (F_{i,j}^{t+1} - F_{i,j}^t) / \Delta t$$

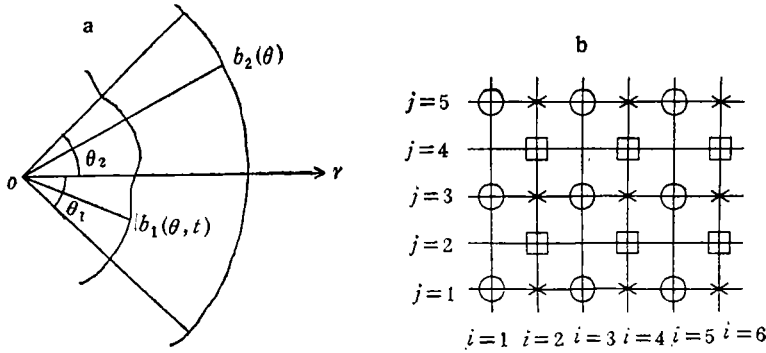


图1 计算区域 (a) 和计算网格 (b)

Fig. 1 The analysis area (a) and grid-point arrangement (b)

○— u 点; □— v 点; ×— ξ 点。

$$\delta_{\xi} F = (F_{i+1,j}^p - F_{i-1,j}^p) / (2\Delta\xi)$$

$$\delta_{\theta} F = (F_{i,j+1}^p - F_{i,j-1}^p) / (2\Delta\theta)$$

$$\bar{F}^{\xi} = \frac{1}{2} (F_{i+1,j}^p + F_{i-1,j}^p)$$

$$\bar{F}^{\theta} = \frac{1}{2} (F_{i,j+1}^p + F_{i,j-1}^p)$$

$$\bar{F}^{\xi\theta} = \bar{F}^{\xi\theta}$$

$$E, F = F_{i,j}^{p+1}$$

方程(5)–(7)的离散形式为:

$$\Delta t (Hb) + \delta_{\xi} (b \bar{H}^{\xi} U) + \delta_{\theta} \left(\frac{v^*}{\bar{b}^{\theta} \xi + \bar{b}_1^{\theta}} \right) + \frac{\bar{u}^{*\xi}}{\xi b + b_1} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_t u^* + \delta_{\xi} (\bar{u}^{*\xi} \bar{U}^{\xi}) + \delta_{\theta} \left(\frac{\bar{v}^{\xi} \bar{u}^{*\theta}}{\bar{b}^{\theta} \xi + \bar{b}_1^{\theta}} \right) + \frac{u u^* - \bar{v}^{\xi\theta} \bar{v}^{*\xi\theta}}{b \xi + b_1} - f \bar{v}^{*\xi\theta} \\ = -g E_i (\bar{H}^{\xi} \delta_{\xi} \xi) + \frac{b \tau_r}{\rho} - \frac{k [u^2 + (\bar{v}^{\xi\theta})^2]^{1/2} E_i u^*}{E_i (\bar{H}^{\xi})} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_t v^* + \delta_{\xi} (\bar{v}^{*\xi} \bar{U}^{\theta}) + \delta_{\theta} \left(\frac{\bar{v}^{\theta} \bar{v}^{*\theta}}{b \xi + b_1} \right) + \frac{2 \bar{u}^{\xi\theta} v^*}{\bar{b}^{\theta} \xi + \bar{b}_1^{\theta}} + E_i (f \bar{u}^{*\xi\theta}) \\ = -g E_i \left[\frac{\bar{H}^{\theta}}{\xi + \bar{b}_1^{\theta} / \bar{b}^{\theta}} \left(\delta_{\theta} \xi - \frac{\xi \delta_{\theta} b + \delta_{\theta} b_1}{\bar{b}^{\theta}} \delta_{\xi} \xi^{\xi\theta} \right) \right] + \frac{\bar{b}^{\theta} \tau_{\theta}}{\rho} \\ - \frac{k [(\bar{u}^{\xi\theta})^2 + v^2]^{1/2} E_i v^*}{E_i (\bar{H}^{\theta})} \end{aligned} \quad (11)$$

(8)式的离散形式为:

$$u = \frac{u^*}{b \bar{H}^{\xi}}$$

$$v = \frac{v^*}{\bar{b}^{\theta} \bar{H}^{\theta}}$$

$$U = \frac{1}{b} \left[u - (1 - \xi) \Delta b_1 - \frac{\bar{v}^{\xi\theta} (\xi \delta_\theta \bar{b}^\theta + \delta_\theta \bar{b}_1^\theta)}{b \xi + b_1} \right]$$

对于如图 2a 所示的凹形岸界的海湾区域，可以把坐标原点建立在海上。岸边界为 $r = b_2(\theta, t)$ ，三个开边界位于 $r = b_1(\theta)$ ， $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 。同样做(4)式数学变换，求解方程组与(5)–(7)完全相同，不同的是：
$$bU = u - \xi b'_1 - \frac{v(\xi b'_\theta + b'_{1\theta})}{\xi b + b_1}$$

岸边界条件变为 $\xi = 1: U = 0; H = 0$

2 极坐标模型与 Johns 直角坐标模型数值稳定性比较

影响 Johns 变边界模型数值稳定性的一个主要因素是 $\frac{\partial b_1}{\partial y}$ 的大小。就是说，岸界切线与基线的夹角会影响数值稳定性。对于 Johns 模型，解决这一问题的唯一方法，就是适当选定坐标轴的方向，使得岸界各点的切线方向与基线方向偏离最小。但对于海湾，要使岸界切线方向与基线夹角不能过大，势必要限制计算区域的大小。而极坐标模型则在一定程度上解决了这个问题。因为影响极坐标数值稳定性的已不是岸界切线与基线的夹角，而变成岸界切线与岸界点坐标圆弧的切线之间的夹角，或者说，稳定性与 $\frac{\partial b_1}{\partial \theta}$ 有关。这样总能选取适当的极坐标原点使得岸界与坐标圆弧吻合较好，也就是使各处 $\frac{\partial b_1}{\partial \theta}$ 达到最小。对于海湾海域，这自然极大地放宽了由于海岸弯曲造成的对计算区域大小的限制。

对于理想的圆弧型海湾， $\frac{\partial b_1}{\partial \theta} = 0$ ，稳定性条件则只与空间步长有关了。

为了说明这个问题，可以在模型海湾海域做一些简单的数值试验。选取一理想化圆弧状岸界的模型海域。如图 2b 所示， α 为岸界顶端圆弧切线方向与其基线的夹角。取陆地坡度和海底坡度均为 1.0×10^{-4} 。计算区域 x 方向最小宽度为 200km，两种模型的空间步长的最小值对应于实际空间为 5km。采用 25m/s 的向岸均匀风进行计算。对于 Johns 模型，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，时间步长限制为 240s， α 为 60° 时为 200s， α 为 70° 时为 150s。对于极坐标模型，不管 α 有多大，甚至计算域可以扩大到一周，采用 300s 的时间步

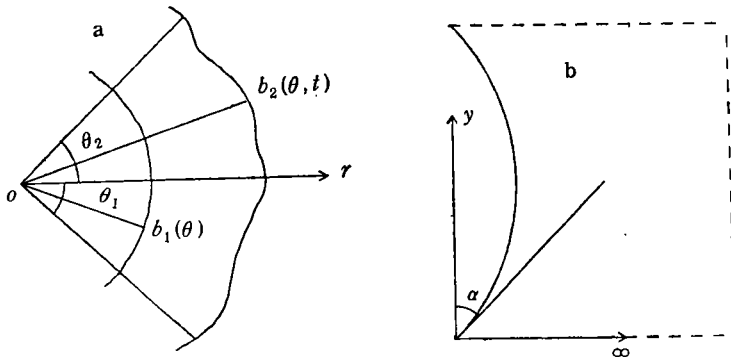


图 2 凹形海岸计算域 (a) 和模型海湾海域 (b)
Fig. 2 The area with convex lang (a) and the model bay (b)

长均能保证很好的稳定性。可以看出,用极坐标模型模拟海湾水域的风暴潮漫滩,计算区域的范围自然变大了,对时间步长的限制也放宽很多。

3 黄河口沿岸水域风暴潮漫滩的数值模拟

作者曾用 Johns 变边界模型模拟了 1964 年 4 月 5 日和 1969 年 4 月 23 日风暴潮漫滩过程,得到了这两次潮灾的最大淹水范围和增水过程曲线。其中 1969 年的风暴潮最大淹水范围与实际调查最大淹水线比较,除套尔河一带误差较大外,其它地区符合较好。分析造成误差的原因是由于所选的基线角度对套尔河一带计算不利,因为这种模型描述的是海岸线与 x 方向网格线交点的移动情况,而在套尔河一带的冲水实际上是负 y 方向的,这样岸线与 x 方向网格线应该出现两个交点。这种模型是模拟不出来的。

极坐标模型则不存在这个问题。只要坐标原点选择适当,计算区域可以比 Johns 模型的计算域增加许多。图 3 给出了极坐标模型的实际空间网格图。对 1969 年 4 月 23 日黄河口水域风暴潮漫滩模拟结果如下。

3.1 风暴潮漫滩过程岸界移动情况和流速分布 图 4 给出了整个漫滩过程的岸界移动情况和风暴潮流分布。可以看出,由于东北风为主,套尔河地区流速较大,但由于流向与沿岸方向基本一致,向岸方向流速很小,因而岸界移动速度也较慢。而羊角沟地区相反,流向为向岸方向,岸界移动速度则很快。由于大量海水流入了莱州湾,退潮时羊角沟地区的流速则相对较小,所以岸界恢复的速度不如套尔河一带快。

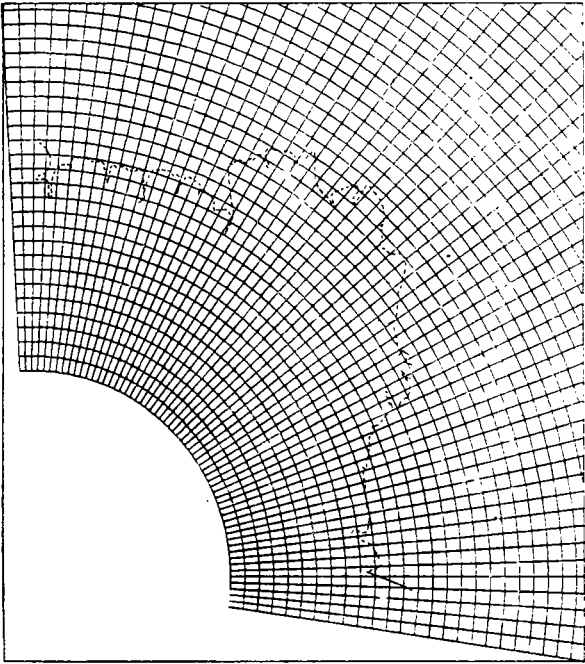


图 3 实际空间网格图(虚线:零潮位岸线)
Fig. 3 Grid point in the calculated area

3.2 风暴潮最大淹水范围 图 5 为模拟得到的风暴潮最大淹水范围。为了与 Johns 模

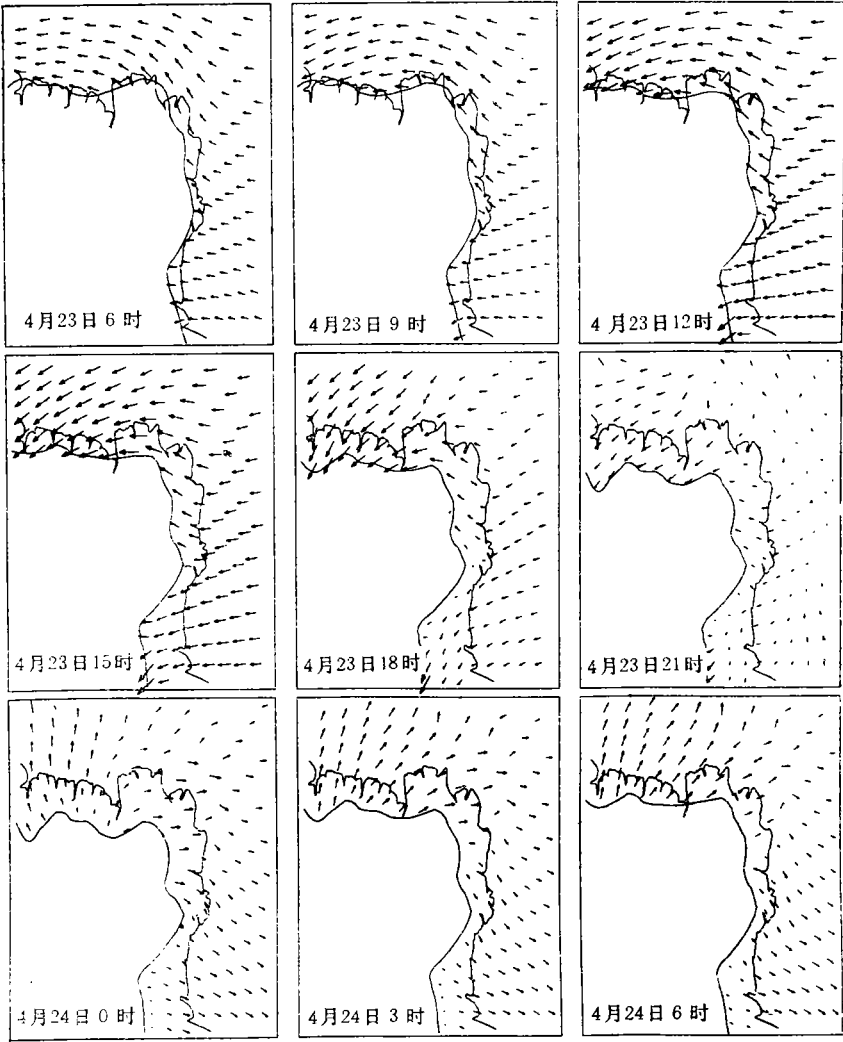


图 4 岸界位置和流速分布
Fig. 4 The land movement and the current distribution

型的结果比较,同时给出了用 Johns 模型模拟得到的最大淹水线。从图 5 看出,极坐标模型显然改进了对套尔河一带的计算。从整体上看,极坐标模型的结果比 Johns 模型的结果要准确。预报淹水面积相对误差为 16.1%,比 Johns 模型提高了 2.5%。极坐标模型的沿岸网格变密,也是计算精度提高的一个原因。

4 结语

与 Johns 直角坐标模型比较,极坐标模型用于海湾水域的风暴潮漫滩计算,改进了以下两个主要方面。

- 4.1 改善了计算的稳定性,可使计算漫滩的海区范围增大。
- 4.2 在极坐标下,陆地网格的加密提高了计算精确度。美国的 SLOSH 模式¹⁾虽也用极

1) NOAA Technical Report NWS 48, April, 1992, SLOSH.

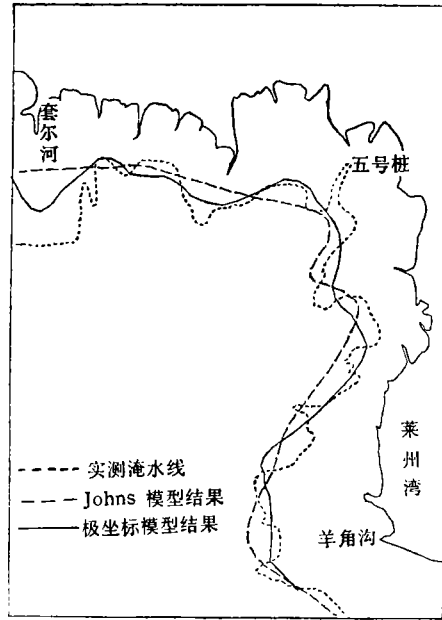


图5 1969年4月23日黄河三角洲受淹范围

Fig. 5 The inundated area in the Huanghe Delta on 23, Apr. 1969

坐标网格,但那仍是干湿判断方法计算风暴潮漫滩中的一种。

通过对1969年黄河口沿岸海域风暴潮漫滩过程的模拟证实了这两点。当然,极坐标变边界模型的不足之处也是显然的。这种模型只能部分地解决由于岸界弯曲较大带来的问题,实际海域的岸界形状是多种多样的,地形也是复杂的,所以它还不能足够细致地描述复杂海域的淹水过程。从这一点看,这种模型仍不如干湿网格法灵活,但这种极坐标模型的采用,毕竟为地形不太复杂海域的风暴潮潮灾预报提供了又一个比较可靠的方法。

参 考 文 献

- 史峰岩、孙文心,1993,渤海局部海域风暴潮漫滩的数值模拟,海洋与湖沼,24(1): 16—23。
 Johns, B., 1982, The simulation of a continuously deforming lateral boundary in problems involving the shallow water equations, *Computer and Fluid*, 10(2): 105—116.
 Flather, R. A. and Heaps, N. S., 1975, Tidal computations for Morecambe Bay, *Geophys., J. R. Astr. Soc.*, 42: 489—517.
 Leendertse, J. J. and Gritton, E. C., 1971, A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas, Vol. 11, Computation procedures, R-708-NYC. The Rand Corporation (New York), pp. 29—33.

THE ADVANCEMENT AND APPLICATION OF A VARIABLE BOUNDARY MODEL IN A POLAR COORDINATE TRANSFORMATION

Shi Fengyan, Sun Wenxin

(*Institute of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003*)

ABSTRACT

Johns advanced a variable boundary model using coordinate transformation in calculating storm surge flooding. The model is mainly characterized by proper employment of the kinematic boundary conditions and continuous movement of the land boundary. This sort of variable boundary model, however, may cause numerical instability due to over-curving of the land boundary. So, it is necessary to limit the calculated area with the curve land and to reduce the time step too. To solve this problem, the authors used a variable boundary model with polar coordinates. Adjusting the coordinate origin point to fit the curve of the polar coordinates and the land boundary as much as possible enlarges the calculated area. Numerical experiments proved the high numerical stability in the calculation within the curved land boundary area. This model was used to simulate the storm surge flooding in the Huanghe Delta on 23 April 1969. The simulation result shows that the polar coordinate model obviously improves the calculation accuracy in the area of the Taoerhe River where Johns' model performed unsatisfactorily, and the relative error of the predicted inundation area is 2.5% less than that of Johns'.

Key words Shallow sea dynamics Storm surge Inundation
Variable boundary model Polar coordinate equation