第26卷 第3期 海洋与湖沼 Vol. 26, No. 3
1995年5月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1995

直立椭圆柱体重力场的谱分析及其应用*

范守志
(中国科学院海洋研究所，青岛 266071)

提 要 利用傅里叶积分变换法导出了埋藏的直立椭圆柱体的重力场在频率域中的解析公式，依此得到了确定此直立椭圆柱体尺寸的公式，提出依据这些重力公式来计算侵入大洋地壳中的地幔柱的尺寸和洋壳厚度的方法。

关键词 重力反演 谱分析 直立椭圆柱体 洋壳厚度

在重力勘探理论中，直立椭圆柱体的反演问题至今尚未解决。困难在于，在埋藏深度和柱体尺寸未知的条件下，一个椭圆柱体在某个观测平面(如海平面) xoy 上产生的重力场 $g(x, y)$ 虽有其明确的定义[见公式(1)]，但却不能表达为解析公式，只是在给定了柱体的埋深及尺寸的具体数值后才能对这个定义所规定的积分进行数值计算(Nagy, 1966)。若椭圆柱体的埋深及尺寸可以任意取值时，那么随着取值情况的不同，它却能作为许多地质客体的模型，例如作为侵入大洋地壳中的地幔柱的模型。因此，求出直立椭圆柱体重力场正反演的公式解不仅是个理论问题，而且具有应用价值。

1 方法

采用傅里叶积分变换的方法导出重力正演公式，然后对这些公式进行理论分析得出易于反演的计算公式。结果如下。

2 结果

2.1 正演公式 在由长宽高确定的自然空间(其坐标系 $o\text{-}xyz$) 中，密度值为 c 的直立椭圆柱体 (Ω) 在观测平面 xoy 上产生的重力场 $g(x,y)$ 是由下式定义的(图1):

$$g(x,y)=Gc\iiint\limits_{\Omega}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\Omega \tag{1}$$

其中，G是万有引力常数，$d\Omega=d\xi d\eta d\zeta$，位于 (ξ,η,ζ) 处；而 Ω 则由下式界定:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2\leqslant 1,\ H_1\leqslant\zeta\leqslant H_2 \tag{2}$$

易见，柱体的高是 $h=H_2-H_1$，它的体积是: $V=\pi abh=\pi ab(H_2-H_1)$ (3)

记 $i=\sqrt{-1}$，并对 $g(x,y)$ 进行如下的傅里叶变换:

$$F(u, v)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}g(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy \tag{4}$$

于是由式(1)及(4)可有(先对 x, y 积分): $F(u,v)=Gc\iiint\limits_{\Omega}Ad\Omega$ (5)

* 自选课题。范守志，男，出生于1941年10月，副研究员。
收稿日期: 1994年5月3日，接受日期: 1994年9月29日。

其中，
$$A=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta^2]^{3/2}}\cdot e^{-i(ux+vy)}dxdy \tag{6}$$

由于
$$\frac{\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta^2]^{3/2}}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{-1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta^2}},$$

又 Grant 等(1965)给出了：
$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(ux+vy)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdy=\frac{2\pi e^{-|z|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{7}$$

因而，
$$A=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(ux+vy)}}{\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}}\cdot e^{-i(u\xi+v\eta)}\cdot dxdy$$

这其中已先对(6)式进行了代换 $x-\xi\to x, y-\eta\to y$。注意到图 1 中有 $\zeta>0$，并利用式(7)，现在有：

$$A=2\pi e^{-i(u\xi+v\eta)}\cdot\frac{-1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{-\zeta\sqrt{u^2+v^2}}$$

即
$$A=2\pi e^{-\zeta\sqrt{u^2+v^2}-i(u\xi+v\eta)} \tag{8}$$

从而
$$F(u,\ v)=2\pi Gc\iiint_{\Omega}e^{-\zeta\sqrt{u^2+v^2}-i(u\xi+v\eta)}d\Omega \tag{9}$$

利用式(2)，先对 ζ 积分，有：
$$F(u,v)=\frac{2\pi Gc}{\sqrt{u^2+v^2}}[e^{-H_1\sqrt{u^2+v^2}}-e^{-H_2\sqrt{u^2+v^2}}]\cdot B \tag{10}$$

这里
$$B=\iint_{\Sigma}e^{-i(u\xi+v\eta)}d\xi d\eta \tag{11}$$

$$\Sigma\text{ 是}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta}{b}\right)^2\leqslant 1$$

取代换 $\frac{\xi}{a}=r\cos\theta,\ \frac{\eta}{b}=r\sin\theta, d\xi d\eta=abrdrd\theta$，同时引入记号 $au=R\cos\varphi, bv=R\sin\varphi$，

这里
$$R=\sqrt{(au)^2+(bv)^2} \tag{12}$$

于是
$$B=ab\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}e^{-iRr\cos(\theta-\varphi)}d\theta \tag{13}$$

由于积分式
$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ix\cos(\theta-\varphi)}d\theta \tag{14}$$

正是零阶贝塞尔函数，因此，式(13)可写成 $B=2\pi ab\int_0^1 J_0(Rr)rdr$.

再利用公式 $xJ_0(x)=[xJ_1(x)]'$，就有
$$B=\frac{2\pi ab}{R}J_1(R) \tag{15}$$

其中，J_1 是一阶贝塞尔函数，且 $J_1(o)=0$，现在式(10)变成：
$$F(u,\ v)=\frac{4\pi^2 Gcab}{\sqrt{u^2+v^2}}(e^{-H_1\sqrt{u^2+v^2}}-e^{-H_2\sqrt{u^2+v^2}})\frac{J_1(R)}{R} \tag{16}$$

用 M 代表椭圆柱体的总质量，那么 $M=Vc=\pi abch=\pi abc(H_2-H_1)$。因而式(16)可写成
$$F(u,v)=4\pi GMF_1(u,v)F_2(u,v) \tag{17}$$

其中，
$$F_1(u,v)=\frac{e^{-H_1\sqrt{u^2+v^2}}-e^{-H_2\sqrt{u^2+v^2}}}{(H_2-H_1)\sqrt{u^2+v^2}} \tag{18}$$

$$F_2(u,v)=\frac{J_1(R)}{R}=\frac{J_1(\sqrt{(au)^2+(bv)^2})}{\sqrt{(au)^2+(bv)^2}} \tag{19}$$

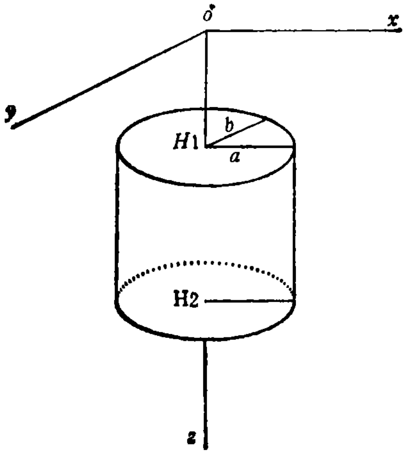

图 1 直立椭圆柱体

Fig. 1 Vertical elliptic cylinder

这样，在自然空间 (x,y,z) 中由式(1)所定义但无法解析表达的函数 $g(x,y)$，在频率域 (u,v) 中得到了解析表达式(17)—(19)，并且在其中标志直立椭圆柱体特征的参数 M(总质量)，H_1(顶面埋深)，H_2(底面埋深)，$h=H_2-H_1$(柱体高度)以及 a，b(柱体横截椭圆的二个半轴长度)已经与表达式 $F(u,v)$ 相直接联系。

2.2 反演公式 如果通过测量有了 $g(x,y)$ 资料，例如在海平面上或是某个解析延拓所达的平面(取为 xoy 面)上的资料，那么由式(4)可直接计算出它的谱值 $F(u,v)$ 来。依下述公式，可由 $F(u,v)$ 算出 a,b 及 h 的数值；而有了这些数值，埋深 H_1 就不难用拟合法确定。

2.2.1 柱体总质量 M 计算公式为 $M=\dfrac{F(0,0)}{2\pi G}$ (20)

事实上，由定义式(4)有 $F(0,0)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dxdy$ (21)

把式(1)代入式(21)式，并先对 x,y 积分：

取换元 $x-\xi=s, y-\eta=t, dxdy=dsdt$；

以及 $r=\sqrt{s^2+t^2}, s=r\cos\theta, t=r\sin\theta, dsdt=rdrd\theta$,

易得
$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta dxdy}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta rdrd\theta}{[r^2+\zeta^2]^{3/2}}=\frac{2\pi\zeta}{|\zeta|}$$

因为 $\zeta>0, |\zeta|=\zeta$，于是 $F(0,0)=2\pi Gc\iiint\limits_{\Omega}d\Omega=2\pi GM$ (22)

而这就是(20)式。另一方面，由式(17)—(19)亦可得式(22)。由于 $F_1(0,0)$ 及 $F_2(0,0)$ 均为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，故由式(17)出发计算 $F(0,0)$ 应计算：

$$\lim_{\substack{u\to0\\v\to0}}F(u,v)=4\pi GM\cdot\lim_{\substack{u\to0\\v\to0}}F_1(u,v)\cdot\lim_{\substack{u\to0\\v\to0}}F_2(u,v) \tag{23}$$

由于 $\dfrac{d}{dt}(e^{-H_1t}-e^{-H_2t})=H_2e^{-H_2t}-H_1e^{-H_1t}$，当 $t\to0$ 时它取值 H_2-H_1；并且

$$\frac{d}{dt}[(H_2-H_1)t]=H_2-H_1,$$

因此，记 $t=\sqrt{u^2+v^2}$，就有：

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} F_1(u,v)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-H_1t}-e^{-H_2t}}{(H_2-H_1)t}=\frac{H_2-H_1}{H_2-H_1}=1 \tag{24}$$

又，
$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} F_2(u,v)=\lim_{R\to 0}\frac{J_1(R)}{R}=\lim_{R\to 0}J_1'(R)=J_1'(o),$$

因而
$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} F_2(u,v)=\frac{1}{2} \tag{25}$$

所以，
$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} F(u,v)=2\pi GM \tag{26}$$

这就是(22)式的结果。式(22)及(26)还指明函数 $F(u,v)$ 在(0，0)处的连续性，从而补充证明了式(17)—(19)亦适用于 $u=v=0$ 的特殊情况，即

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} F(u,v)=F(0,0)=2\pi GM \tag{27}$$

2.2.2 柱体的横向尺寸 a,b　　由于 $H_2>H_1$（图 1），因此由式(18)可见，对一切 u,v 值有：$F_1(u,v)>0$ (28)

故由式(17)及(28)知，条件 $F(u,v)=0$ (29)

与条件 $F_2(u,v)=0$ 是等价的，即与条件 $J_1(R)=0$ (30)

是等价的。注意到式(12)，若记方程(30)的正根（有无穷多个）为：

$$R_1,R_2,R_3,\cdots,R_k,\cdots(>0)\ \text{则}\ J_1(R_k)=0,k=1,2,3,\cdots \tag{31}$$

现在先取 $v=0$，记满足条件 $F(u,o)=0$ 的 u 值（先考虑正值）各为 $u_1,u_2,\cdots,u_k,\cdots$，

即　$F(u_1,o)=0,$

$F(u_2,o)=0,$

$\vdots$

即　$F(u_k,0)=0,\quad k=1,2,3,\cdots$ (32)

那么由式(30)及式(12)必然有：$au_1=R_1,au_2=R_2,\cdots,au_k=R_k\cdots,$

因而
$$a=\frac{R_k}{u_k},k=1,2,3,\cdots \tag{33}$$

式(32)及(33)给出了求 a 值的公式。

各 R_k 的数值完全是确定的，它们是 $J_1(R)=0$ 的根（图 2），例如：$R_1=3.83$，$R_2=7.02$，$R_3=10.18$，$R_4=13.32$ 等等；此后有足够精确的关系式 $R_{k+1}\approx R_k+3.1416$ 成立。同样，若先固定 $u=0$，并记满足条件 $F(0,$

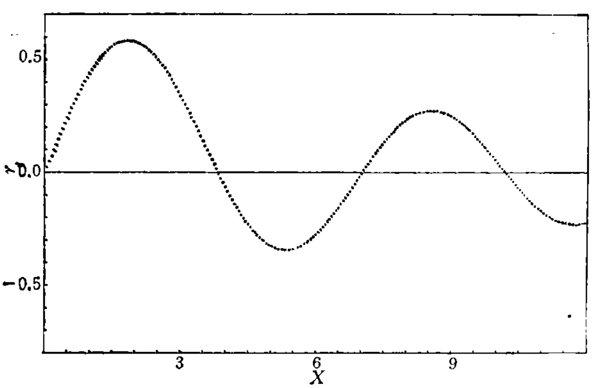

图 2　$J_1(R)$ 的图形

Fig. 2　Curve of function $J_1(R)$

$v) = 0$ 的各 v 值(先考虑正值)为 $v_1, v_2, \cdots, v_k, \cdots$，那么同样的推导过程就会给出：

若
$$F(0, v_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{34}$$
则必
$$b = \frac{R_k}{v_k}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{35}$$
式(34)，(35)给出了计算 b 的公式。

一般地，在整个 (u, v) 平面上，使 $F(u, v)$ 取零值的等值线应满足方程 $F(u, v) = 0$，而由(30)式，这些等值线的方程是 $J_1(\sqrt{(au)^2 + (bv)^2}) = 0$。由式(31)知这样的等值线理论上讲有无穷多条，其方程是 $(au)^2 + (bv)^2 = R_k^2, k = 1, 2, 3, \cdots$　　(36)

这是一系列的椭圆的方程。其中，第 k 个椭圆的 u 半轴及 v 半轴的长度各为：
$$p_k = \frac{R_k}{a}, q_k = \frac{R_k}{b}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{37}$$

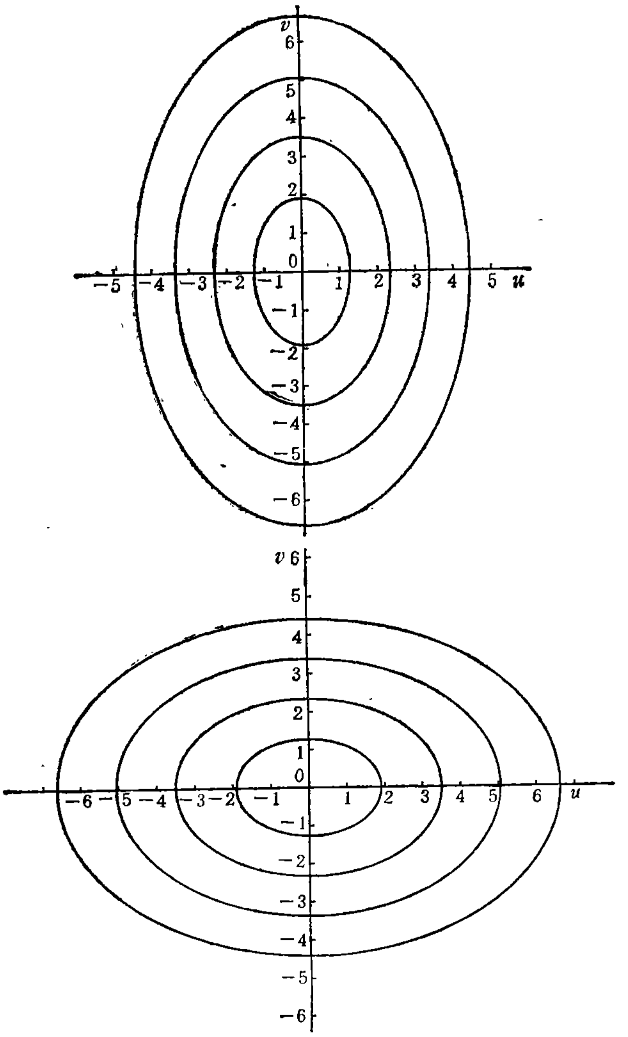

图 3　$F(u, v) = 0$ 的曲线(上图：a = 3km, b = 2km；下图：a = 2km, b = 3km)
Fig. 3　Curve of $F(u, v) = 0$ (upper: a = 3km, b = 2km; below: a = 2km, b = 3km)

显然，当 $a > b$ 时，有 $p_k < q_k$；当 $a < b$ 时，有 $p_k > q_k$；而当 $a = b$（正圆柱体）时，$p_k = q_k$，$F(u,v)$ 的零值等值线是一系列同心圆。图 3 上图给出了 $a = 3\text{km}$，$b = 2\text{km}$ 时的 $F(u,v) = 0$ 的等值线族。图中 u,v 的单位均是 $(\text{km})^{-1}$；图 3 下图则给出了 $a = 2\text{km}$，$b = 3\text{km}$ 的情况。

综上所述，直立椭圆柱体重力场在频率域中的谱值 $F(u,v)$ 的零值等值线是一系列同心的椭圆形的分离"谱线"，通过它们可以确定柱体的横向尺寸 a 和 b。

2.2.3 柱体高度 h

$$h = \frac{v}{\pi ab} = \frac{M}{\pi abc} \tag{39}$$

或者，

$$h = \frac{p_R q_k F(0,0)}{2\pi^2 G c R_k^2}, \qquad k = 1,2,3\cdots \tag{40}$$

在实际应用中，c 是柱体密度值减去围岩密度值之差。对于侵入大洋地壳中的地幔柱来说，可取 $c \doteq 3.27 - 2.67 = 0.6(t/m^3)$。

2.2.4 地幔柱　　取侵入洋壳中的地幔柱的重力学模型为直立椭圆柱体，地壳厚度 T 相当于地幔柱的高度

$$T \approx h \tag{41}$$

依照上述公式，地幔柱的尺寸 a,b,h 均可求出，T 也就确定了。

3　讨论

3.1　直立椭圆柱体的重力正演和反演问题在本文中得到了完整的解决，从而为重力勘探提供了一种新的工具。

3.2　在有 $g(x,y)$ 资料的情况下，公式(4)，(20)，(33)，(35)，(37)及(40)都是计算机上可操作的。

3.3　公式(41)给出了只依靠重力资料来估算洋壳（地幔柱周围地区）厚度值的方法。若水深 4km，$h = 10\text{km}$，$a = 3\text{km}$，$b = 2\text{km}$，那么此地幔柱产生的重力场 $g(x,y)$ 在其上方的数值不难算出约为 20mGal，这是现代海洋重力仪完全可以检测到的，因为在优良定位的条件下，海洋重力测量的精度可达 2—3mGal（吴金龙等，1990）。

3.4　有关坐标系 xoy 的选取及相关问题，作者将另文讨论。

参　考　文　献

吴金龙、范守志，1990，东海舟东海域高精度重力调查，海洋科学，**1**：50—53。

Nagy, Dezsö, 1966, The evaluation of heuman's lamb da function and its application to calculate the gravitational effect of a right circular cylinder, *Pure Appl. Geophy.*, **6**(26):1—8.

Grant, F. S. & West, G. F., 1965, Interpretation Theory in Applied Geophysics, McGraw-Hill Book Company (New York), pp. 216—218.

SPECTRUM ANALYSES OF GRAVITY FIELD OF A VERTICAL ELLIPTIC CYLINDER AND ITS USE

Fan Shouzhi

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao 266071*)

ABSTRACT

In this study, the analytical formulas of the gravity field produced by a buried vertical elliptic cylinder were derived in the frequency domain, and the formulas for determining the size of the cylinder were then found. A method using these for mulas to calculate the size of a mantle beam intruding into the ocean crust, and the thickness of the crust, is presented.

Let Ω be a vertial elliptic cylinder (see Fig. 1), $g(x, y)$ its gravity field formula(1), and $F(u,v)$ the Fourier transform of $g(x,y)$. Then

$$F(u,v) = 4\pi GMF_1(u,v)F_2(u,v) \tag{17}$$

where G is the gravitational constant, M the mass of Ω,

$$F_1(u,v) = \frac{e^{-H_1\sqrt{u^2+v^2}} - e^{-H_2\sqrt{u^2+v^2}}}{(H_2 - H_1)\sqrt{u^2+v^2}} \tag{18}$$

and

$$F_2(u,v) = \frac{J_1(R)}{R} = \frac{J_1(\sqrt{(au)^2+(bv)^2})}{\sqrt{(au)^2+(bv)^2}} \tag{19}$$

where J_1 is the Bessel function of first order.

Key words Gravity inversion Spectrum analyses Vertical elliptic cylinder Crust thickness