



二阶谱理论及在海浪研究中的应用*

I. 二阶谱的性质

余宙文[†]

(国家海洋局海洋环境预报中心,北京 100081)

丁平兴[†]

(华东师范大学河口海岸研究所,上海 200062)

孙孚

(青岛海洋大学物理海洋实验室,青岛 266003)

提要 针对目前国内对于二阶谱的研究及应用尚不普遍的状况,在参考国外文献以及我们已完成的有关研究基础上,系统地阐述了实过程的二阶谱、交叉二阶谱与矢量过程的旋转二阶谱、旋转交叉二阶谱的定义与概念,重点讨论了实过程二阶谱的有关性质。

关键词 二阶谱 交叉二阶谱 旋转二阶谱 旋转交叉二阶谱

二阶谱是一种研究随机过程的数学工具。但直到 Hasselmann 等(1963)将其应用于实际海浪过程的非线性研究以来,才显示了它广阔的应用前景。随后,国外有不少学者对二阶谱的应用作了较深入的研究,并取得不少成果 (Nikias et al., 1987)。我国对二阶谱的研究及应用起步较晚,有关的文献及讨论现在仍很少。为了在国内推动二阶谱理论与应用研究的发展,我们对现有二阶谱研究的成果以及这几年我们所做的工作进行系统地总结与整理,期望能对正确理解二阶谱的定义与概念,清晰了解二阶谱的有关性质,方便掌握二阶谱的估计方法等诸方面均有所裨益,从而促进二阶谱在非线性的有关领域中的应用。

1 二阶谱

我们就自然界中普遍存在的随机标量(实)过程与随机矢量过程,严格地给出它们各自的二阶谱定义,并阐述它们的含义。

1.1 实过程的二阶谱 二阶谱也叫做三阶累积(cumulant)谱,一般地,可用三阶累积函数的傅氏变换来定义二阶谱。但对于均值为零的平稳随机过程 $x(t)$,由于它的三阶累积函数与三阶矩函数恒等,因而人们也普遍地把二阶谱表示为过程 $x(t)$ 三阶矩函数的

* 国家自然科学基金资助项目,49070254号。

[†] 青岛海洋大学物理海洋实验室兼职研究人员。

收稿日期:1992年3月27日,接受日期:1992年6月7日。

傅氏变换:

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (1)$$

式中, $R(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)]$, $E[\cdot]$ 表示取数学期望。(1)式的逆变换为:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (2)$$

为较明确地理解二阶谱的概念,可用 Fourier-Stieltjes 积分来表示均值为零的平稳随机过程 $x(t)$, 即:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\omega) e^{i\omega t} \quad (3)$$

那么, $x(t)$ 的二阶谱就可被定义为:

$$E[dF(\omega_1)dF(\omega_2)dF^*(\omega_3)] = \begin{cases} B(\omega_1, \omega_2)d\omega_1 d\omega_2 & \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases} \quad (4)$$

可见,二阶谱为 3 个傅氏分量乘积的平均值,且其中一个分量的频率等于其它二个分量频率之和。所以,二阶谱反映的是频率分别为 ω_1, ω_2 与 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 3 个组成波之间相关程度的一种量度,或者说是这 3 个组成波之间相互作用对 $E[x^3(t)]$ 的贡献。

在实际问题中,谱值往往是离散的,此时,平稳随机过程 $x(t)$ 可表示成:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \quad (5)$$

相应地,二阶谱可写成: $B(\omega_k, \omega_l) = E[A_k A_l A_{k+l}^*]$ (6)

为了更直接揭示组成波之间的相关程度,还可定义频率域上的二阶相关系数,或叫做二阶相干谱为:

$$b(\omega_k, \omega_l) = \frac{|B(\omega_k, \omega_l)|}{\{E[|A_k A_l|^2] \cdot E[|A_{k+l}|^2]\}^{1/2}} \quad (7)$$

二阶相干谱在形式上类似于功率交叉谱中的凝聚谱,但凝聚谱表示的是两类不同过程之间线性相关的程度,而二阶相干谱则表示同一过程中频率分别为 ω_k, ω_l 与 $\omega_k + \omega_l$ 3 个组成波之间相关的程度。

1.2 实过程之间的交叉二阶谱 设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 3 个均值为零的实平稳随机过程,类似于(1)式,可定义这 3 个过程之间的交叉二阶谱为 (Roden et al., 1973):

$$B_{xyz}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xyz}(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (8)$$

式中, $R_{xyz}(\tau_1, \tau_2) = E[x(t)y(t+\tau_1)z(t+\tau_2)]$ 。

同理,交叉二阶谱也可分别表示成:

$$E[dF_x(\omega_1)dF_y(\omega_2)dF_z^*(\omega_3)] = \begin{cases} B_{xyz}(\omega_1, \omega_2)d\omega_1 d\omega_2 & \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases} \quad (9)$$

或 $B_{xyz}(\omega_k, \omega_l) = E[A_x(\omega_k)A_y(\omega_l)A_z^*(\omega_k + \omega_l)]$ (10)

上面式中的 $dF_x(\omega), A_x(\omega)$ 等分别参照(3)式与(5)式。从(9)式可知,交叉二阶谱能表

示 3 个不同过程中频率分别为 ω_1, ω_2 与 $\omega_1 + \omega_2$ 3 个组成波之间联合相关的程度。显然, 如果这 3 个过程是联合正态的, 则它们的交叉二阶谱恒等于零。若 3 个过程中有二个是相同的, 例如 $x(t) = y(t)$, 则此时交叉二阶谱 $B_{xxz}(\omega_1, \omega_2)$ 反映 $x(t)$ 过程中频率为 ω_1, ω_2 的二个组成波与 $z(t)$ 过程中频率为 $\omega_1 + \omega_2$ 的组成波之间相互作用的程度。如果 3 个过程均相同, 则交叉二阶谱简化为二阶谱。

1.3 矢量过程的旋转二阶谱 为从内部结构上客观唯一地描述矢量过程, Gonella (1972) 与 Mooers (1973) 分别提出了旋转谱、旋转交叉谱的概念, 至今已得到广泛的应用。但在旋转谱分析中, 假定构成矢量过程的分矢量之间是相互独立的。于是, 类似于实过程, 要想研究分矢量之间或矢量过程之间的相互作用, 就需进行更高阶的旋转谱分析。为此 Yao 等(1975)把实过程中的二阶谱分析技术推广到矢量过程, 相应地, 给出了旋转二阶谱、旋转交叉二阶谱的定义, 并应用于实际问题的计算。下面分别作简要介绍。

设 $\mathbf{u}(t)$ 是一个平稳的、均值为零的二维随机矢量过程, 它的旋转二阶谱可定义为:

$$RB(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (11)$$

式中, $\mathbf{C}(\tau_1, \tau_2) = E[\mathbf{u}^*(t)\mathbf{u}(t + \tau_1)\mathbf{u}(t + \tau_2)] = E[\mathbf{u}^*(t)\mathbf{u}(t + \tau_2)\mathbf{u}(t + \tau_1)]$ 。

相应地, 利用 Fourier-Stieltjes 积分形式, 旋转二阶谱可表示成:

$$E[\mathbf{U}(\omega_1)\mathbf{U}(\omega_2)\mathbf{U}^*(\omega_3)] = \begin{cases} RB(\omega_1, \omega_2)d\omega_1 d\omega_2 & \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases} \quad (12)$$

此处 $\mathbf{U}(\omega)$ 是 $\mathbf{u}(t)$ 的傅氏系数。不同于实过程, (11), (12) 式中的 ω 为角速度。如将角速度为 ω 的振荡分量分解成频率分别为 $\pm\sigma$ 的两个旋转分量, 则由于旋转二阶谱中的 3 个角速度 $\omega_j, j = 1, 2, 3$, 都可取正或负值, 故它们的排列共有 8 种:

$$\left. \begin{array}{ll} |\sigma_2| > |\sigma_1| & |\sigma_2| < |\sigma_1| \\ 1. \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 & 2. \sigma_2 + \sigma_1 = \sigma_3 \\ 3. -\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 & 4. \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_3 \\ 5. \sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_3 & 6. -\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma_3 \\ 7. -\sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_3 & 8. -\sigma_2 - \sigma_1 = -\sigma_3 \end{array} \right\} \quad (13)$$

对应的区域如图 1 所示。在上述 8 种排列中, 只有其中 4 种是独立的。若考虑区域 1, 3, 5, 7, 则对应的旋转二阶谱可分别表示为:

$$\text{区域 1} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 \\ RB(\sigma_1, \sigma_2)d\sigma^2 = E[\mathbf{U}_+(\sigma_1)\mathbf{U}_+(\sigma_2)\mathbf{U}_+^*(\sigma_3)] \quad (14)$$

$$\text{区域 3} \quad -\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3, \quad |\sigma_2| > |\sigma_1| \\ RB(-\sigma_1, \sigma_2)d\sigma^2 = E[\mathbf{U}_-(\sigma_1)\mathbf{U}_+(\sigma_2)\mathbf{U}_+^*(\sigma_3)] \quad (15)$$

$$\text{区域 5} \quad \sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_3, \quad |\sigma_2| > |\sigma_1| \\ RB(\sigma_1, -\sigma_2)d\sigma^2 = E[\mathbf{U}_+(\sigma_1)\mathbf{U}_-(\sigma_2)\mathbf{U}_-^*(\sigma_3)] \quad (16)$$

$$\text{区域 7} \quad -\sigma_1 - \sigma_2 = -\sigma_3 \\ RB(-\sigma_1, -\sigma_2)d\sigma^2 = E[\mathbf{U}_-(\sigma_1)\mathbf{U}_-(\sigma_2)\mathbf{U}_-^*(\sigma_3)] \quad (17)$$

上述式中的 $\mathbf{U}_-(\sigma), \mathbf{U}_+(\sigma)$ 分别是向顺时针与逆时针旋转的傅氏系数。对于矢量过程, 要确定其旋转二阶谱, 必须同时算出上面 4 个区域中的谱值。定义旋转二阶相干

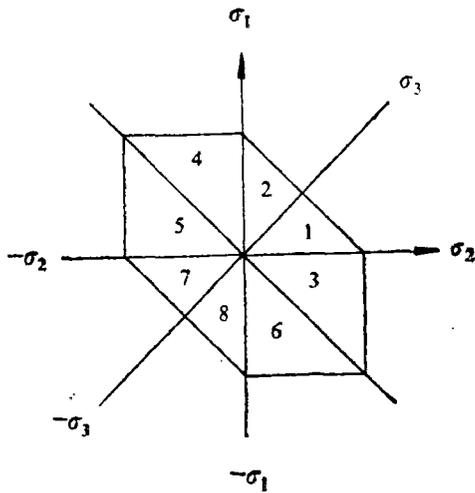


图1 矢量过程二阶谱的对称区域

Fig. 1 Symmetric regions of bispectrum for vector process

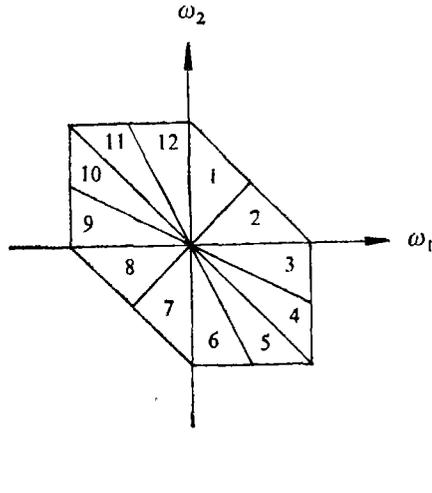


图2 标量过程二阶谱的对称区域

Fig. 2 Symmetric regions of bispectrum for scalar process

谱:

$$Rb(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|RB(\sigma_1, \sigma_2)|}{[P_{u+u+}(\sigma_1)P_{u+u+}(\sigma_2)P_{u+u+}(\sigma_1+\sigma_2)d\sigma^3]^{1/2}} \quad (18)$$

式中, $P_{u+u+}(\sigma)d\sigma = E[U_+(\sigma)U_+^*(\sigma)] = E[|U_+(\sigma)|^2]$ 为 $u(t)$ 的逆时针旋转谱。旋转二阶相干谱能刻画矢量过程 $u(t)$ 中频率分别为 σ_1, σ_2 与 $\sigma_1 + \sigma_2$ 3 个分矢量之间的相关程度。若构成 $u(t)$ 的分矢量之间是相互独立的, 则旋转二阶谱、旋转二阶相干谱恒等于零。另外, 旋转二阶谱的模及旋转二阶相干谱是坐标不变量, 因而它们能客观而唯一地描述矢量过程的非线性特征。

1.4 矢量过程之间的旋转交叉二阶谱 设 $u(t), v(t), w(t)$ 是 3 个平稳的、均值为零的二维随机矢量过程, 则它们之间的旋转交叉二阶谱可定义为:

$$RB_{uvw}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_{uvw}(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (19)$$

式中, $C_{uvw}(\tau_1, \tau_2) = E[u^*(t)v(t+\tau_1)w(t+\tau_2)]$ 。旋转交叉二阶谱也可用 Fourier-stieltjes 形式表示为:

$$E[U_u(\omega_1)U_v(\omega_2)U_w^*(\omega_3)] = \begin{cases} RB_{uvw}(\omega_1, \omega_2)d\omega_1d\omega_2 & \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \\ 0 & \omega_1 + \omega_2 \neq \omega_3 \end{cases} \quad (20)$$

若将角速度域上的 $RB_{uvw}(\omega_1, \omega_2)$ 变换到频率域上的 $RB_{uvw}(\sigma_1, \sigma_2)$, 则需同时计算图 1 中所示的整个平面才能唯一地确定 $RB_{uvw}(\sigma_1, \sigma_2)$ 。但如 3 个矢量过程中有二个是相同的, 也即此时仅涉及到二个矢量过程, 如 $u(t), v(t)$, 那么此时需确定旋转交叉二阶谱 $RB_{uvw}(\sigma_1, \sigma_2)$ 的区域与旋转二阶谱相同。 $RB_{uvw}(\sigma_1, \sigma_2)$ 能刻画两个矢量过程 $u(t)$ 与 $v(t)$ 之间非线性相互作用的程度, Yao 等(1977)就是利用 $RB_{uvw}(\sigma_1, \sigma_2)$ 研究了海洋中当地风速和当地海流之间的非线性相互作用。和旋转二阶谱一样, 旋转交叉二阶谱

的模也是坐标不变量。

2 二阶谱的性质

依据前面二阶谱的定义,我们重点导出实过程二阶谱的部分性质。

2.1 对称性 对于均值为零的平稳实随机过程 $x(t)$, 它的二阶谱具有如下对称关系(见图 2):

$$B(\omega_1, \omega_2) = B(\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \quad (21)$$

于是,我们只需确定 12 个区域中任何一个区域上的 $B(\omega_1, \omega_2)$, 其它区域上的 $B(\omega_1, \omega_2)$ 就可通过(21)式求得。所以,人们常在区域 2 内估计二阶谱。

但对于 3 个不同实过程之间的交叉二阶谱,其对称关系仅有:

$$B_{xyz}(\omega_1, \omega_2) = B_{xzy}^*(-\omega_1, -\omega_2) \quad (22)$$

所以,此时需计算半个平面内的谱值。而如果其中有二个过程相同时,例 $y(t) = z(t)$, 则增加如下对称关系:

$$B_{xyy}(\omega_1, \omega_2) = B_{xyy}(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) \quad (23)$$

于是,只要确定区域 1, 2, 3 上的 $B_{xyy}(\omega_1, \omega_2)$ 便可,其它区域上的谱值可分别利用(22), (23)求得。

2.2 复数性 一般地,实过程的二阶谱、交叉二阶谱以及矢量过程的旋转二阶谱、旋转交叉二阶谱是复数,它们均可用极坐标形式表出。例如对于实过程的二阶谱,可表示成:

$$B(\omega_1, \omega_2) = |B(\omega_1, \omega_2)| e^{i\Phi(\omega_1, \omega_2)} \quad (24)$$

其中二阶谱的模及位相分别为:

$$|B(\omega_1, \omega_2)| = [\text{Re}^2 B(\omega_1, \omega_2) + \text{Im}^2 B(\omega_1, \omega_2)]^{1/2} \quad (25)$$

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \text{arctg} \frac{\text{Im} B(\omega_1, \omega_2)}{\text{Re} B(\omega_1, \omega_2)} \quad (26)$$

它们可以分别表示所描述过程二阶非线性的程度及组成波之间的位相关系。同理可写出交叉二阶谱等对应的式子。

2.3 有界性 对于实过程的二阶相干谱,可证明: $0 \leq b(\omega_1, \omega_2) \leq 1$ 。若 $b(\omega_1, \omega_2)$ 近似等于 1, 则可表示 ω_1, ω_2 与 $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ 3 个组成波之间存在着完全的相互作用,可以认为 ω_3 的组成波是由于 ω_1 与 ω_2 2 个组成波非线性相互作用而产生; 反之, 若 $b(\omega_1, \omega_3)$ 接近于零, 则意味着这 3 个组成波之间不存在相互作用, 即频率为 ω_3 的组成波不是由于频率为 ω_1 与 ω_2 的组成波之间相互作用的结果, 而是独立于 ω_1 和 ω_2 组成波的另一个组成波。所以,二阶相干谱可以很直接、方便地测量 3 个组成波之间相互作用的程度。旋转二阶相干谱也有与以上类似的性质。

2.4 二阶谱与非正态性 对于一个平稳随机过程, 非零的二阶谱值可表示该过程是非正态的。若在(2)式中取 $\tau_1 = \tau_2 = 0$, 便有:

$$R(0, 0) = E[x^3(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (27)$$

如 $x(t)$ 表示某一固定点的随机波面, 若可将它视为平稳高斯过程, 则它的三阶矩恒等于零, 从上式可知, 对应的二阶谱值亦为零; 反之, 若二阶谱值不为零, 便可推知 $x(t)$ 不服从高斯分布, 亦即构成随机波面 $x(t)$ 的组成波之间并非相互独立, 而是存在着由于波

与波相互作用而导致的相互关系。所以,我们可用二阶谱值来刻画海浪等实过程的非正态性和非线性的程度。

同理, $B_{xyz}(\omega_1, \omega_2)$, $RB(\sigma_1, \sigma_2)$, $RB_{uu}(\sigma_1, \sigma_2)$ 可分别表示实过程之间, 矢量过程及矢量过程之间非线性相互作用的程度。

2.5 非高斯白噪声 如果 $W(t)$ 是一个平稳非高斯白噪声过程, 且 $E[W(t)] = 0$, $E[W(t)W(t+\tau)] = Q\delta(\tau)$, $E[W(t)W(t+\tau_1)W(t+\tau_2)] = \beta\delta(\tau_1, \tau_2)$, 则该过程的功率谱与二阶谱均为一个常数, 即:

$$S(\omega) = Q \quad (28)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = \beta \quad (29)$$

2.6 通过线性滤波器的非高斯过程 令 $x(t)$ 是一个均值为零的非高斯过程, 具有二阶谱 $B_x(\omega_1, \omega_2)$ 。设此过程通过传递函数为 $H(\omega)$ 的滤波器后的输出为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)ds \quad (30)$$

式中,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (31)$$

那么, $y(t)$ 的二阶谱为:

$$B_y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2) \cdot B_x(\omega_1, \omega_2) \quad (32)$$

特别地, 如 $x(t)$ 是非高斯白噪声, 那么 $B_x(\omega_1, \omega_2) = \beta$, 于是:

$$B_y(\omega_1, \omega_2) = \beta H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (33)$$

如 $x(t)$ 是高斯过程, 则因为 $B_x(\omega_1, \omega_2) = 0$, 便有 $B_y(\omega_1, \omega_2) = 0$ 。

2.7 通过非线性变换的高斯过程 令 $x(t)$ 是一个均值为零的平稳高斯过程, 且其自相关函数为 $R_x(\tau)$, 功率谱为 $S_x(\omega)$ 。设此过程通过如下非线性变换:

$$y(t) = x(t) + ax^2(t) \quad (34)$$

其中 a 是个小量, 以致 a^3 可以忽略。那么输出过程 $y(t)$ 的功率谱和二阶谱分别为:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + a^2 R_x^2(0)\delta(\omega) + 2a^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)S_x(\omega - \lambda)d\lambda \quad (35)$$

$$\begin{aligned} B_y(\omega_1, \omega_2) = & 2a[S_x(\omega_1)S_x(\omega_2) + S_x(\omega_1)S_x(\omega_1 + \omega_2) \\ & + S_x(\omega_2)S_x(\omega_1 + \omega_2)] + aR_x(0)[S_x(\omega_1)\delta(\omega_2) \\ & + S_x(\omega_2)\delta(\omega_1) + S_x(\omega_2)\delta(\omega_1 + \omega_2)] + 0(a^3) \end{aligned} \quad (36)$$

显然, 若 $a = 0$, 则 $S_y(\omega) = S_x(\omega)$, $B_y(\omega_1, \omega_2) = 0$ 。所以, 人们可通过输入一个高斯过程, 看其输出过程的二阶谱是否为零来判别该系统是线性还是非线性的。

以上这些性质, 对于进一步理解二阶谱的概念, 进行二阶谱估计以及具体应用, 都是非常有用的。

参 考 文 献

- Gonella, J., 1972, A rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series, *Deep-Sea Res.*, **19**:833-846.
Hasselmann, K. et al., 1963, Bispectra of ocean waves. Proc. of Symposium on Time Series Analysis, John Wiley (New York), pp. 125-139.

- Mooers, C. N. K., 1973, A technique for the cross spectrum analysis of pairs of complex-valued time series, with emphasis on properties of polarized components and rotational invariance, *Deep-Sea Res.*, **20**:1129—1141.
- Nikias, C. L. and Raghuveer, M. R., 1987, Bispectrum estimation: A digital signal processing framework, *Proc. IEEE.*, **75**:869—891.
- Roden, G. I. and Bendiner, D. J., 1973, Bispectra and cross-bispectra of temperature, salinity, sound velocity and density fluctuations with depth off Northeastern Japan, *J. P. O.*, **3**:308—317.
- Yao, N. C. et al., 1975, Rotary cross-bispectra and energy transfer functions between non-Gaussian vector processes I. Development and example, *J. P. O.*, **5**:164—172.
- Yao, N. C. et al., 1977, Rotary cross-bispectra and energy transfer functions between non-Gaussian vector processes II. winds and currents off the Oregon coast, *J. P. O.*, **7**:892—903.

BISPECTRAL THEORY AND ITS APPLICATION TO SEA WAVES I. CHARACTERISTICS OF BISPECTRA

Yu Zhouwen

(National Research Center for Marine Environment Forecasts, Beijing 100081)

Ding Pingxing

(Institute of Estuarine and Coastal Research, East China Normal University, Shanghai 200062)

Sun Fu

(Laboratory of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao 266003)

ABSTRACT

Most physical processes in the ocean are non-Gaussian in nature, and the classical spectral analysis fails to distinguish any deviations of the processes from normality, and to discern phase relations among component waves due to nonlinear wave-wave interaction. Higher order spectral analysis is needed to address these problems. The bispectra, defined as the Fourier transforms of the third order cumulants or moments, have been shown to be very useful tools in the study of nonlinear characteristics of random processes.

The definitions and concepts of bispectra and cross bispectra for random scalar processes and of rotary bispectra and rotary cross bispectra for random vector processes are systematically reviewed to better understanding of the theory of bispectra and its application to related areas. In addition, the properties of bispectra are especially discussed.

Key words Bispectra Cross bispectra Rotary bispectra Rotary cross bispectra