第13卷 第5期　　海 洋 与 湖 沼　　Vol. 13, No. 5
1982 年 9 月　　OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA　　Sept., 1982

多端元模式下的 A, B, C 端元*

范守志　毛彦平
（中国科学院海洋研究所）

在多参数样品群的对比分类中，端元相关法的实质是先确定尽可能少的几个特征端元，再把各样品分别与这几个端元加以对比，以避免逐一对比各对样品之间的相关程度。

基于双端元模式的 $A-B$ 相关法已有讨论[1,2,3]。本文进而讨论三端元模式以及在多端元模式下确定三个端元的方法。

文中用 X 表示向量 $\boldsymbol{X}$ 的模；用 $Q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 表示向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 间的夹角的余弦（Q 因子），有时也用 Q_{XY} 表之。

一、 A, B 端元

我们来证明，在双端元模式下确定 A, B 端元的最小 Q 因子方法[3]仍然成立，即有：

定理一　设 N 个样品向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ 中的每一个都是 m 个端元向量 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{X}_i = \sum_{K=1}^{m} k_{iK}\boldsymbol{A}_K \tag{1}$$

其中 $k_{iK} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots N;\ K = 1, 2, \cdots m)$，

则对一切 $i, j = 1, 2, \cdots N$，恒有

$$Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) \geqslant \min_{1\leqslant r, S\leqslant m} [Q(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_s)]. \tag{2}$$

为了证明(2)，先证下述的引理。

引理一　设有 $m+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_m$，以及 m 个非负实数 $k_1, k_2, \cdots k_m$，

则

$$Q\left(\boldsymbol{X}, \sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{A}_i\right) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m} [Q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}_i)]。 \tag{3}$$

事实上，由 Q 因子的定义，我们有

$$Q\left(\boldsymbol{X}, \sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{A}_i\right) = \frac{\left(\boldsymbol{X}, \sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{A}_i\right)}{|\boldsymbol{X}| \cdot \left|\sum_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{A}_i\right|}$$

---

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 729 号。

本刊编辑部收到稿件日期：1980年 10 月 8 日。

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i A_i Q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}_i)}{\left|\sum_{i=1}^{m} k_i \boldsymbol{A}_i\right|} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i A_i Q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}_i)}{\sum_{i=1}^{m} k_i A_i}$$
$$\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant m} [Q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}_i)]。$$

这其中我们假定了各个Q均为非负。

对于(2)，现在我们有

$$Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = Q\left(\boldsymbol{X}_i, \sum_{K=1}^{m} k_{jK} \boldsymbol{A}_K\right) \geqslant \min_{1\leqslant K\leqslant m} [Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{A}_K)],$$

即
$$Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) \geqslant \min_{1\leqslant K\leqslant m}\left[Q\left(\sum_{S=1}^{m} k_{iS} \boldsymbol{A}_S, \boldsymbol{A}_K\right)\right]$$
$$\geqslant \min_{1\leqslant K,S\leqslant m} [Q(\boldsymbol{A}_S, \boldsymbol{A}_K)],$$

证明完毕。

定理一表明，在多端元模式（1）之下，各对样品向量之间的Q值均大于或等于某对端元向量之间的Q值。由Q因子的判别意义可知，这对具有最小Q值的端元是最不相似的，称为理想的 A，B 端元。

因而，对于给定的一组实测资料 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\cdots \boldsymbol{X}_N$ 而言，可由下式从中挑选出一对 A，B 端元来：

$$Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \min_{1\leqslant i,j\leqslant N} [Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)]。 \tag{4}$$

这式易于在电子计算机上实行。

二、三端元模式中的 C 端元

如何确定第三个端元？

定理二　设N个向量中的每一个，如 $\boldsymbol{X}$，均可表为某三个端元向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，和 $\boldsymbol{C}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{A} + k_2\boldsymbol{B} + k_3\boldsymbol{C},$$

k_1，k_2，$k_3 \geqslant 0$，则 $\boldsymbol{C}$ 端元具有如下特征：

$$\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) + \cos^{-1}Q(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}) \leqslant \cos^{-1}Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) + \cos^{-1}Q(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \tag{5}$$

证明　记

$$y = \cos^{-1}Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) + \cos^{-1}Q(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{X})。$$

（情况一）$k_3 \neq 0$，

记

$$m = \frac{k_1 A}{k_3 C}, \quad n = \frac{k_2 B}{k_3 C},$$

则 m，$n \geqslant 0$.

因为
$$Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})=\frac{1}{Y}[m+nQ(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})+Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C})],$$
$$Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})=\frac{1}{Y}[mQ(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})+n+Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})],$$
其中 $Y=\sqrt{m^2+n^2+1+2mnQ(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})+2m\,Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})+2n\cdot Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})},$

都是 m, n 的二元函数,所以
$$y=y(m,\ n)$$
也是 m, n 的二元函数。

因为
$$y(0,\ 0)=\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C})+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}),\tag{6}$$
所以，$m=n=0$ 时式(5)成立且取等号。

又，
$$\frac{\partial y}{\partial m}=\frac{-1}{\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})}}\cdot\frac{\partial Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})}{\partial m}+\frac{-1}{\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})}}\cdot\frac{\partial Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})}{\partial m}=\frac{1}{Y}\left[-\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})}+\frac{Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})-Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})}}\right]。$$

但已证明[2],对任意三个 n 维向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{X}$, 恒有
$$Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})-Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})\leqslant\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})}\cdot\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})},$$
因此
$$\frac{\partial y}{\partial m}\leqslant 0。$$
同理可证
$$\frac{\partial y}{\partial n}\leqslant 0,\tag{7}$$
因而,对一切 m, $n\geqslant 0$ 均有
$$y(m,\ n)\leqslant y(0,\ 0)。$$
再由(6)知,式(5)对一切 k_1, $k_2(\geqslant 0)$ 及 $k_3>0$ 成立。(情况二) $k_3=0$,

此时
$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{B},$$
记
$$y=y(k_1,\ k_2)$$
因为
$$Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})=\frac{1}{X}[k_1A+k_2BQ(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})],$$
$$Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})=\frac{1}{X}[k_1AQ(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})+k_2B],$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial k_1}=\frac{A}{X}\left[-\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})}+\frac{Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})-Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})}}\right],$$

但此时用直接代入的方法可以得到

$$Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})-Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X})}\cdot\sqrt{1-Q^2(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X})},$$

因而
$$\frac{\partial y}{\partial k_1}=0。$$

同理可证
$$\frac{\partial y}{\partial k_2}=0。$$

于是
$$y=y(k_1,\ k_2)=\text{常数。}$$

由于
$$y(0,\ 1)=\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}),$$

因此
$$y=\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})。\tag{8}$$

对比(5)及(8)式知，现在仅须证明

$$\cos^{-1}Q(A,\ B)\leqslant\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})。\tag{9}$$

当各Q值在$[-1,\ 1]$中取值时，(9)式中各项取值范围均为$[0,\ \pi]$，右方取值范围是$[0,\ 2\pi]$。当右式在$[\pi,\ 2\pi]$中取值时，(9)式自然成立。而当右式在$[0,\ \pi]$中取值时，在(9)式两边同时取余弦并由文章[2]的附录一知其成立。

于是定理二成立。

三、多端元模式下的 C 端元

我们来证明，在多端元模式(1)成立时，对于任意的 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，都有

$$\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}_i)+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}_i)\leqslant\max_{1\leqslant K\leqslant m}[\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_K)+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_K)],\tag{10}$$

这里假定各Q值均为非负的。

因此，若由式(4)确定出 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 端元后，由(10)式知，可由下式确定第三个端元$\boldsymbol{C}$：

$$\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})=\max_{1\leqslant i\leqslant N}[\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{X}_i)+\cos^{-1}Q(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X}_i)]。\tag{11}$$

很明显，这式易于在计算机上实行。

为了证明式(10)，须先证明如下定理：

引理二　若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是任意四个 n 维向量，又

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{C}+l\boldsymbol{D},$$

其中 $k,\ l\geqslant 0$，

则　$\cos^{-1}Q_{AX}+\cos^{-1}Q_{BX}\leqslant\max[\cos^{-1}Q_{AC}+\cos^{-1}Q_{BC},\ \cos^{-1}Q_{AD}+\cos^{-1}Q_{BD}]$，

假定各Q值均为非负。

[证明] 不失一般性,可设

$$\cos^{-1}Q_{AC}+\cos^{-1}Q_{BC}\leqslant\cos^{-1}Q_{AD}+\cos^{-1}Q_{BD}\tag{12}$$

则须证

$$\cos^{-1}Q_{AX}+\cos^{-1}Q_{BX}\leqslant\cos^{-1}Q_{AD}+\cos^{-1}Q_{BD}\tag{13}$$

因诸Q非负,故(12),(13)各与下面(14),(15)等价:

$$Q_{AC}Q_{BC}-\sqrt{1-Q_{AC}^2}\sqrt{1-Q_{BC}^2}\geqslant Q_{AD}Q_{BD}-\sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}\tag{14}$$

$$Q_{AX}Q_{BX}-\sqrt{1-Q_{AX}^2}\sqrt{1-Q_{BX}^2}\geqslant Q_{AD}Q_{BD}-\sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}\tag{15}$$

注意今有

$$Q_{AX}=\frac{1}{X}[kCQ_{AC}+lDQ_{AD}],$$

$$Q_{BX}=\frac{1}{X}[kCQ_{BC}+lDQ_{BD}],$$

$$X=\sqrt{(kC)^2+(lD)^2+2klCDQ_{CD}},$$

因此 $l=0$ 时式(15)即是(14)。

当 $l\neq0$ 时,记 $m=kC/lD$, $m\geqslant0$,

则

$$\left.\begin{aligned}Q_{AX}&=\frac{1}{V}[mQ_{AC}+Q_{AD}],\\Q_{BX}&=\frac{1}{V}[mQ_{BC}+Q_{BD}],\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

其中

$$V=\sqrt{m^2+2mQ_{CD}+1}。$$

由(16)且利用[2]的附录一,可有

$$\left.\begin{aligned}1-Q_{AX}^2&\leqslant\frac{1}{V^2}[m\sqrt{1-Q_{AC}^2}+\sqrt{1-Q_{AD}^2}]^2,\\1-Q_{BX}^2&\leqslant\frac{1}{V^2}[m\sqrt{1-Q_{BC}^2}+\sqrt{1-Q_{BD}^2}]^2,\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

由(16),(17)可得

$$Q_{AX}Q_{BX}-\sqrt{1-Q_{AX}^2}\sqrt{1-Q_{BX}^2}\geqslant\frac{K}{V^2},\tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}K=&m^2[Q_{AC}Q_{BC}-\sqrt{1-Q_{AC}^2}\sqrt{1-Q_{BC}^2}]+[Q_{AD}Q_{BD}\\&-\sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}]+m[Q_{AC}Q_{BD}-\sqrt{1-Q_{AC}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}]\\&+m[Q_{AD}Q_{BC}-\sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BC}^2}]。\end{aligned}$$

由(14),得

$$\begin{aligned}K\geqslant&(m^2+1)[Q_{AD}Q_{BD}-\sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}]\\&+m[Q_{AC}Q_{BD}-\sqrt{1-Q_{AC}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}]\end{aligned}$$

$$+ m[Q_{AD}Q_{BC} - \sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BC}^2}], \tag{19}$$

由(18),(19)知,欲证(15),
仅须证

$$Q_{AC}Q_{BD} - \sqrt{1-Q_{AC}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2} + Q_{AD}Q_{BC} - \sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BC}^2}$$
$$\geqslant 2Q_{CD}[Q_{AD}Q_{BD} - \sqrt{1-Q_{AD}^2}\sqrt{1-Q_{BD}^2}],$$

引人记号 $\theta_{AC} = \cos^{-1}Q_{AC}$, $\theta_{BD} = \cos^{-1}Q_{BD}$, 等等,则所待证者为

$$\cos\frac{\theta_{AC}+\theta_{BD}+\theta_{AD}+\theta_{BC}}{2} \cdot \cos\frac{\theta_{AC}-\theta_{AD}+\theta_{BD}-\theta_{BC}}{2}$$
$$\geqslant \cos\theta_{CD} \cdot \cos(\theta_{AD}+\theta_{BD}), \tag{20}$$

但由(12)知

$$\cos\frac{\theta_{AC}+\theta_{BD}+\theta_{AD}+\theta_{BC}}{2} \geqslant \cos(\theta_{AD}+\theta_{BD}),$$

因此若能证

$$\cos\left(\frac{\theta_{AC}-\theta_{AD}}{2}+\frac{\theta_{BD}-\theta_{BC}}{2}\right) \geqslant \cos\theta_{CD} \tag{21}$$

则(20)即成立,因为 $\cos\theta_{CD}$ 非负。

这可由 $$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\theta_{AC}-\theta_{AD}}{2},\ \frac{\theta_{BD}-\theta_{BC}}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

得 $$\cos\left(\frac{\theta_{AC}-\theta_{AD}}{2}+\frac{\theta_{BD}-\theta_{BC}}{2}\right)$$
$$\geqslant \sqrt{\frac{1+\cos(\theta_{AC}-\theta_{AD})}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(\theta_{BD}-\theta_{BC})}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{1-\cos(\theta_{AC}-\theta_{AD})}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(\theta_{BD}-\theta_{BC})}{2}}$$

再由[2]之附录一,总有

$$1 \geqslant \cos(\theta_{AC}-\theta_{AD}) \geqslant \cos\theta_{CD},$$
$$1 \geqslant \cos(\theta_{BD}-\theta_{BC}) \geqslant \cos\theta_{CD},$$

因而得到

$$\cos\left(\frac{\theta_{AC}-\theta_{AD}}{2}+\frac{\theta_{BD}-\theta_{BC}}{2}\right) \geqslant \frac{1+\cos\theta_{CD}}{2} - \frac{1-\cos\theta_{CD}}{2}。$$

这正是(21)式。引理二于是得证。

由引理二,并采用数学归纳法,知m为任意正整数时,(10)均成立。

(10)式的几何意义是：对任意给定的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 在多端元模式(1)之下，从诸端元 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\cdots\boldsymbol{A}_m$ 中总可以找到一个端元,它到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的角距离之和是最大的。

四、讨　论

在实际应用时,首先从资料阵

$$\mathbf{X}=(X_{iK})_{NXM}$$

中依(4)及(11)式确定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 端元，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 之间的角距离是最大的，$\boldsymbol{C}$ 是到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的角距离之和最大的。X_{iK} 是第 i 站中第K种参数的测定值。

进行Q型分析时，资料阵的第 i 行相应于(4),(11)中的 $\boldsymbol{X}_i$; 作R型分析时，资料阵中的第 i 列相应于(4),(11)中的 $\boldsymbol{X}_i$。

式(4),(11)表明，这样来确定 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的计算量很小，而且占用计算机的存储单元也是很少的。

虽然本文详细证明了方法的数学基础，但它的有效性须由应用实践来检验。曾用此法分析了东海海底沉积物的重矿物资料（235 站，44 种重矿物），作的是Q型分析。结果是令人满意的[4]。

参 考 文 献

[1] 范守志，1979。应用Q因子进行样品分类的 A-B 相关法。海洋与湖沼 **10**(4): 319—328。
[2] 范守志，1981。应用Q因子进行样品分类的 A-B 相关法的信任椭园。海洋与湖沼论文集。科学出版社 123—136 页。
[3] 范守志，1982。A-B 相关法中的 A, B 端元。海洋与湖沼 **13**(1): 60—65。
[4] 陈丽蓉、范守志、毛彦平，东海沉积物中重矿物组合的统计分析。海洋科学集刊(第 21 集)(排印中)。

THE *A*, *B*, *C* END-MEMBERS IN THE MULTI-END-MEMBERS MODEL

Fan Shouzhi　and　Mao Yanping
(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

This paper is a development of a previous one[3].

It has been proved that if each one of N sample vectors $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_N$ may be written as

$$\boldsymbol{X}_i = \sum_{s=1}^{m} k_{is}\boldsymbol{A}_s$$

where $k_{is} \geqslant 0$ and $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2, \cdots \boldsymbol{A}_m$ are m end-member samples, then

$$Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) \geqslant \min[\{Q(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_s)\}]; \tag{1}$$

$$\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}_i) + \cos^{-1}Q(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}_i) \leqslant \max[\{\cos^{-1}Q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_r) + \cos^{-1}Q(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_r)\}] \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots N \\ r, s = 1, 2, \cdots m \end{pmatrix}$$

where the $Q(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)$ is cosine of the angle between the vectors $\boldsymbol{X}_i$ and $\boldsymbol{X}_j$, and $0 \leqslant Q(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_s) \leqslant 1$.

On the basis of the formulas (1) and (2) above, therefore, we can select the end-member samples $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ from among a given set of data samples $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots \boldsymbol{X}_N$.

There is a successful example of this method described in a previous paper[4].