

## 海洋对引潮力反应的初步探讨\*

修 日 晨

(国家海洋局第一海洋研究所)

世界各国对海洋潮汐运动的研究由来已久,现在,对世界各主要港口的潮汐已能够进行较准确的推算和预报。然而,随着观测手段的进步和资料的不断积累,人们愈加感到大洋中(包括赤道区在内)的潮汐运动,实际上比人们所想象的要复杂得多<sup>[1]</sup>,不仅其潮位(流)的大小因地而异,而且其高潮间隙、潮令也千差万别。为了解释这复杂的潮汐现象,已经提出了许多理论模式<sup>[2]</sup>,但这些模式在求解解析时常常不考虑摩擦效应。为了考虑摩擦的影响,本文求得一种简单的数学模型的精确解,论述了海洋对于引潮力作用的响应的三种基本形态,以及无界、封闭和半封闭海洋对其反应的形式。文中指出,平衡潮与动力潮之间并无本质区别;大洋中的潮汐运动则尤其错综复杂。对于摩擦力的作用,文中也进行了较详细的讨论。并指出,即使在研究大洋中的潮汐运动,也必须考虑摩擦力的作用。文中所得的一些结果,对于潮汐理论及其预报方法的研究都将会是有益的。

### 一、方程的建立与求解

本文旨在定性地了解海洋对于引潮力作用的反应情况,以及摩擦力在其中所起的作用。因此,采用了一维潮波强迫阻尼振动这样一种简单的数学模型。为了研究方便,又作了若干的简化。如,取直角坐标系,假设海洋密度均匀、等深、水平流速上下均匀、对摩擦力取线性形式,不考虑柯氏力等。研究结果表明,尽管作了上述简化,对本文所论述的问题则并无实质性影响。下面分无界、封闭、半封闭海洋三种情况进行讨论。

#### (一) 无 界 海 洋

假设有一无界海洋,其一维潮波强迫阻尼振动的运动方程和连续方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = F_0 \cos(\sigma t - kx), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

其初始条件为

$$t = 0, \quad u = \zeta = 0. \quad (1.3)$$

式中  $u$  为水平运动速度,  $\zeta$  为潮波振幅,  $g$  为重力加速度;  $\mu$  为摩擦系数, 取为常量;  $h$  为

\* 本文的研究工作,曾得到束星北教授的热情指导和帮助;作者就有关问题曾请教过方国洪副教授,得到了热情的帮助;陈宗儒副教授和王宗山同志还分别审阅了本文的初稿,提出了宝贵意见,均此深表谢意。

本刊编辑部收到稿件日期: 1981年12月12日。

水深, 取为常量;  $F_0$  为作用于单位质量水体上的引潮力幅,  $\sigma$  为引潮力的圆频率,  $k$  为其波数。

所得到的解是

$$u = \frac{\sigma F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \left\{ \sin(\sigma t - kx + \beta) + e^{-\mu t} \sin(\omega t + kx - \beta) - e^{-\mu t} \left[ \cos(kx - \beta) + \frac{\mu}{\omega} \sin(kx - \beta) + \frac{c^2 k^2}{\sigma \omega} \cos(kx - \beta) \right] \sin \omega t \right\}, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{k h F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \left\{ \sin(\sigma t - kx + \beta) - e^{-\mu t} \frac{\sigma}{c k} \sin(\omega t + kx - \beta - \epsilon) \right. \\ & + e^{-\mu t} \left[ \sin(kx - \beta) + \frac{\sigma}{c k} \sin(kx - \beta - \epsilon) \right] \cos \omega t \\ & \left. + e^{-\mu t} \left[ \frac{\mu}{\omega} \sin(kx - \beta) + \left(1 + \frac{\mu^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{c k} \sin(kx - \beta - \epsilon) \right] \sin \omega t \right\}. \quad (1.5) \end{aligned}$$

式中,  $\omega^2 = c^2 k^2 - \mu^2$ ,  $c = \sqrt{gh}$  为自由波波速,  $\beta$  和  $\epsilon$  为初位相, 且

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\mu\sigma}{\sigma^2 - c^2 k^2}, \quad \epsilon = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\mu}{\omega}.$$

不难看出, 式 (1.4) 和 (1.5) 是方程组的非稳定解。当  $t \rightarrow \infty$  时, 则获得其稳定解:

$$u = \frac{\sigma F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \sin(\sigma t - kx + \beta), \quad (1.6)$$

$$\zeta = \frac{k h F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \sin(\sigma t - kx + \beta). \quad (1.7)$$

## (二) 封 闭 海 洋

假设有一封闭海洋, 其一维潮波强迫阻尼振动的运动方程和连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu u + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = F_0 \cos(\sigma t - kx), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

边界条件为

$$x = 0, \quad u = 0; \quad x = l, \quad u = 0. \quad (2.3)$$

根据边界条件, 所得到的解是

$$\begin{aligned} u = & \frac{\mu \sigma^2 F_0}{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2} \left\{ \cos(\sigma t - kx) - e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \alpha_1 x) \right. \\ & - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2 x \operatorname{sh} \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \operatorname{ch} \alpha_2 x \operatorname{ch} \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\operatorname{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \operatorname{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\ & \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \\ & + \frac{\operatorname{ch} \alpha_2 x \operatorname{sh} \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \operatorname{sh} \alpha_2 x \operatorname{ch} \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\operatorname{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \operatorname{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\ & \left. \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma(\sigma^2 - c^2 k^2) F_0}{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2} \left\{ \sin(\sigma t - kx) - e^{-\alpha_2 x} \sin(\sigma t - \alpha_1 x) \right. \\
& - \frac{\text{sh } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \text{ch } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& + \frac{\text{ch } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \text{sh } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \left. \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \right\} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta = & \frac{\mu \sigma h F_0}{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2} \left\{ k \cos(\sigma t - kx) - \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} \cos(\sigma t - \alpha_1 x) - \alpha_2 e^{-\alpha_2 x} \sin(\sigma t - \alpha_1 x) \right. \\
& - \alpha_2 \frac{\text{ch } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \text{sh } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& + \alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \text{ch } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& + \alpha_1 \frac{\text{sh } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \text{ch } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& - \alpha_1 \frac{\text{ch } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \text{sh } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \left. \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \right\} \\
& + \frac{(\sigma^2 - c^2 k^2) F_0}{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2} \left\{ k \sin(\sigma t - kx) - \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} \sin(\sigma t - \alpha_1 x) + \alpha_2 e^{-\alpha_2 x} \cos(\sigma t - \alpha_1 x) \right. \\
& - \alpha_2 \frac{\text{ch } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \text{sh } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& + \alpha_2 \frac{\text{sh } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \text{ch } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& + \alpha_1 \frac{\text{sh } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \cos \alpha_1 l - \text{ch } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \times [\cos(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \cos(\sigma t - \alpha_1 l)] \\
& - \alpha_1 \frac{\text{ch } \alpha_2 x \text{ sh } \alpha_2 l \cos \alpha_1 x \cos \alpha_1 l + \text{sh } \alpha_2 x \text{ ch } \alpha_2 l \sin \alpha_1 x \sin \alpha_1 l}{\text{sh}^2 \alpha_2 l \cos^2 \alpha_1 l + \text{ch}^2 \alpha_2 l \sin^2 \alpha_1 l} \\
& \left. \times [\sin(\sigma t - kl) - e^{-\alpha_2 l} \sin(\sigma t - \alpha_1 l)] \right\} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

把式(2.4)和(2.5)再整理一下,则成为

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\sigma F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2}} \\
 &\times \left\{ M_x \sin(\sigma t - K_m x + \beta) - M_l \sqrt{\frac{A_x}{A_l}} \sin(\sigma t + K_m l + \beta + p_x - p_l) \right\}, \quad (2.6) \\
 \zeta &= \frac{h F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2}} \\
 &\times \left\{ N_x \sin(\sigma t - K_n x + \beta) + \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} M_l \sqrt{\frac{B_x}{A_l}} \sin(\sigma t - K_m l + \beta + \nu + f_x - g_l) \right\}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

式中,  $c = \sqrt{gh}$  是自由波波速,  $\omega = \sqrt{c^2 k^2 - \mu^2}$  是固有振动频率。另外

$$\begin{aligned}
 \beta &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\mu \sigma}{\sigma^2 - c^2 k^2}, \quad \nu = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \\
 \alpha_1 &= \frac{\sigma}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2}} + 1}{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2}} - 1}{2}}, \\
 M_x^2 &= 1 + e^{-2\alpha_2 x} - 2e^{-\alpha_2 x} \cos(k - \alpha_1)x, \\
 M_l &= 1 + e^{-2\alpha_2 l} - 2e^{-\alpha_2 l} \cos(k - \alpha_1)l, \\
 K_m x &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin kx - e^{-\alpha_2 x} \sin \alpha_1 x}{\cos kx - e^{-\alpha_2 x} \cos \alpha_1 x}, \\
 K_m l &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin kl - e^{-\alpha_2 l} \sin \alpha_1 l}{\cos kl - e^{-\alpha_2 l} \cos \alpha_1 l}, \\
 N_x^2 &= k^2 + \frac{\sigma^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\alpha_2 x} - 2k \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \sin[(k - \alpha_1)x + \nu], \\
 K_n x &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{k \sin kx - \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \cos(\alpha_1 x - \nu)}{k \cos kx + \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \sin(\alpha_1 x - \nu)}, \\
 p_x &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \alpha_2 x \operatorname{tg} \alpha_1 x, \quad p_l = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \alpha_2 l \operatorname{tg} \alpha_1 l, \\
 f_x &= \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \alpha_2 x \operatorname{ctg} \alpha_1 x, \quad g_l = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \alpha_2 l \operatorname{tg} \alpha_1 l, \\
 A_x &= \operatorname{sh}^2 \alpha_2 x + \sin^2 \alpha_1 x, \quad A_l = \operatorname{sh}^2 \alpha_2 l + \sin^2 \alpha_1 l, \\
 B_x &= \operatorname{sh}^2 \alpha_2 x + \cos^2 \alpha_1 x, \quad B_l = \operatorname{sh}^2 \alpha_2 l + \cos^2 \alpha_1 l.
 \end{aligned}$$

### (三) 半封闭海洋

假设有一半封闭海洋,其一维潮波强迫阻尼振动的运动方程和连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu u + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = F_0 \cos(\sigma t - kx), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

边界条件为

$$x = l, u = 0; x = 0, \zeta = \zeta_0 \cos \sigma t. \quad (3.3)$$

所得到的解是

$$\begin{aligned} u = & \frac{\sigma F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2}} \\ & \times \left\{ W_x \sin(\sigma t - K_w x + \beta) - W_l \sqrt{\frac{B_x}{B_l}} \sin(\sigma t - K_w l + \beta + \vartheta_x - \vartheta_l) \right\} \\ & - \zeta \frac{c}{h} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ & \times \left\{ e^{-\alpha_2 x} \sin(\sigma t - \alpha_1 x - \nu) - e^{-\alpha_2 l} \sqrt{\frac{B_x}{B_l}} \sin(\sigma t - \alpha_1 l - \nu + \vartheta_x - \vartheta_l) \right\}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{h F_0}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + \mu^2 \sigma^2}} \\ & \times \left\{ k V_x \sin(\sigma t - K_v x + \beta) - Q_l \sqrt{\frac{A_x}{B_l}} \cos(\sigma t - K_q l + \beta + \eta_x - s_l) \right\} \\ & + \zeta_0 \left\{ e^{-\alpha_2 x} \cos(\sigma t - \alpha_1 x) - e^{-\alpha_2 l} \sqrt{\frac{A_x}{B_l}} \sin(\sigma t - \alpha_1 l + \eta_x - s_l) \right\}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} W_x^2 = & 1 + \frac{c^2 k^2}{\sigma^2} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha_2 x} + 2 \frac{c k}{\sigma} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \sin[(k - \alpha_1)x - \nu], \\ K_w x = & \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin kx + \frac{c k}{\sigma} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \cos(\alpha_1 x + \nu)}{\cos kx - \frac{c k}{\sigma} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 x} \sin(\alpha_1 x + \nu)}, \\ K_w l = & \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin kl + \frac{c k}{\sigma} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 l} \cos(\alpha_1 l + \nu)}{\cos kl - \frac{c k}{\sigma} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 l} \sin(\alpha_1 l + \nu)}, \\ \vartheta_x = & \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{th} \alpha_2 x \operatorname{tg} \alpha_1 x, \quad \vartheta_l = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{th} \alpha_2 l \operatorname{tg} \alpha_1 l, \\ V_x^2 = & 1 + e^{-2\alpha_2 x} - 2 e^{-\alpha_2 x} \cos(k - \alpha_1)x, \\ K_v x = & \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sin kx - e^{-\alpha_2 x} \sin \alpha_1 x}{\cos kx - e^{-\alpha_2 x} \cos \alpha_1 x}, \\ Q_l^2 = & k^2 e^{-2\alpha_2 l} + \frac{\sigma^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{\sigma k}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha_2 l} \sin[(k - \alpha_1)l - 3\nu], \\ K_q l = & \operatorname{tg}^{-1} \frac{k e^{-\alpha_2 l} \sin(\alpha_1 l + 2\nu) - \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} \cos(kl - \nu)}{k e^{-\alpha_2 l} \cos(\alpha_1 l + 2\nu) + \frac{\sigma}{c} \left( 1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sin(kl - \nu)}, \\ \eta_x = & \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{cth} \alpha_2 x \operatorname{tg} \alpha_1 x, \quad s_l = \operatorname{tg}^{-1} \operatorname{th} \alpha_2 l \operatorname{tg} \alpha_1 l. \end{aligned}$$

式中其它符号意义同前。

## 二、结果分析与讨论

根据上述对无界、封闭及半封闭海洋中一维潮波强迫阻尼振动的求解结果,进行以下几个方面的分析讨论。

### (一) 稳态的受迫振动

由式(1.4)~(1.7)可知,摩擦力使受迫振动系统由非稳定状态进入了稳定状态。而且,在稳定的受迫振动系统中只存在着强迫振动部分,也就是说,强迫力中有怎样的振动周期,受迫振动系统中就必然有着与之相同的振动周期。

### (二) 功率的输入与消耗

在机械运动中,当作用力与摩擦力相平衡时,物体就保持匀速直线运动状态。然而,在受迫振动系统中,则只有当外力输送给该振动系统的周期平均功率与该系统本身由于摩擦力作用而消耗的周期平均功率相平衡时,该系统才能保持稳定的受迫振动状态。对此,我们可以借助于式(1.6)进行证明。

若以 $W$ 表示引潮力在一个周期内所输送给单位质量海水的平均功率,以 $W'$ 表示其在一个周期内由于摩擦力作用而所消耗的平均功率,以“ $\langle \rangle$ ”表示周期平均,则有

$$W = \langle F \cdot u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma F_0^2}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \sin \beta, \quad (1.8)$$

以及

$$W' = \langle 2\mu u \cdot u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma F_0^2}{\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}} \sin \beta. \quad (1.9)$$

因为 $W = W'$ ,故上述结论得到证明。这表明,如果把世界海洋的潮汐运动,作为一个独立的稳定的受迫振动系统,那末,引潮力所输送给海洋水体的潮能,必然恰与其摩擦力所消耗的能量相平衡。

由式(1.8)可知,引潮力所输送给海洋功率的大小,除与引潮力力幅 $F_0$ 值的大小有关外,还与 $\beta$ 值的大小有关。因为 $\beta = \tan^{-1} \frac{2\mu\sigma}{\sigma^2 - c^2 k^2}$ ,所以,当 $\sigma \ll ck$ ,或 $\sigma \gg ck$ 时,则 $\beta \approx 0$ ,故 $W \approx 0$ 。不难证明,在 $\sigma \ll ck$ 和 $\sigma \gg ck$ 这两种情况下,引潮力在1/2周期内对水质点作正功,而在另外1/2周期内则作负功,故其周期平均输入功率为零。而当 $\beta = ck$ 时,则 $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,故此时的输入功率达最大值,且 $W_{\max} = \frac{F_0^2}{4\mu}$ 。实际上,当 $\sigma = ck$ 时,此时引潮力在一个周期内永远对水质点作正功,这就是产生共振现象的原因所在。由此可知,当我们在讨论引潮力对海洋水体做功时,除了考虑引潮力量值的大小外,还必须考虑另外一个重要因子,即海区本身固有振动周期的大小。因为在引潮力的诸分力中,只有那些在周期上与海区固有振动周期相接近的分力,其所输入的潮能功率才是显著的,从而形成了该海区的优势分潮。

### (三) 对引潮力的响应

强迫力能否激发起受迫系统产生强烈振动,强迫力的大小固然重要,但更重要的还是强迫力的频率能否与该振动本身的固有振动频率相接近,也就是说,受迫振动系统对强迫力的响应是频率的响应。对于海洋的潮汐运动,情况也是如此。对此,我们以式(1.6)和(1.7)作如下说明。

由式(1.6)和(1.7)可知,潮汐运动 $u$ 及 $\zeta$ 振幅的大小,不仅与引潮力 $F_0$ 值的大小有关,还与其 $\sqrt{(\sigma^2 - c^2 k^2)^2 + 4\mu^2 \sigma^2}$ 值的大小有关。图1和图2给出的是 $u$ 和 $\zeta$ 的振幅随不同 $\sigma$ 值的分布图。

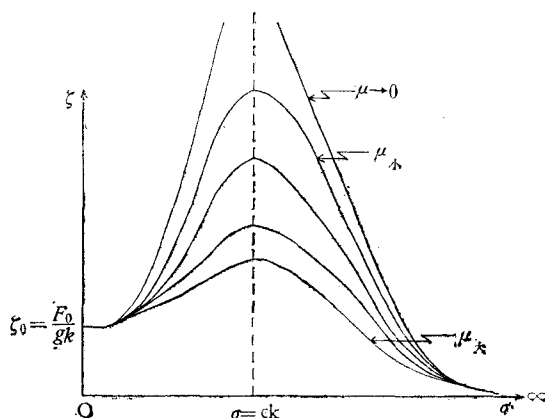


图1 潮位 $\zeta$ 的响应函数

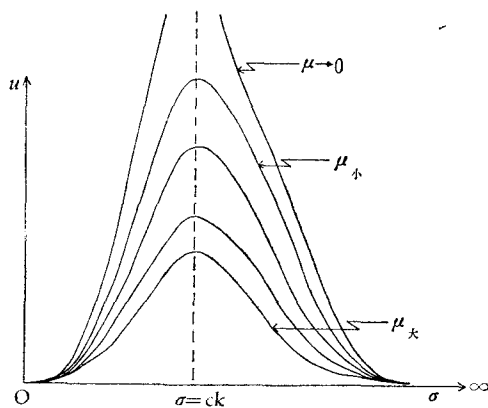


图2 潮流 $u$ 的响应函数

由图1和图2可知,海洋水体对于引潮力作用的响应,可有以下三种情况。

**1. 平衡响应** 当 $\sigma \rightarrow 0$ , 或 $\sigma \ll ck$ 时, 则此时 $u \approx 0$ ,  $\zeta \approx \frac{F_0}{gk}$ 。这就是说, 在引潮力的周期无限大时, 无界海洋引潮力波速远小于自由波波速以及有界海洋引潮力频率远小于海区的固有振动频率时, 则海水的压强梯度力将与引潮力相平衡。此时, 海面即为等势面, 故称之为平衡响应。此时所产生的海洋潮汐运动, 即为平衡潮。当地球为等深海水

所包围的情况下,无论其水深为 3000 米或 5000 米,皆不能满足平衡响应的条件。然而,在那些小而浅的湖泊中,却能满足平衡响应的条件。

**2. 共振响应** 当  $\sigma = ck$ , 或  $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$  时,则  $u$  和  $\zeta$  的振幅有最大值,且

$$|u| = \frac{F_0}{2\mu}, \quad |\zeta| = \frac{F_0}{2\mu} \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

这就是说,对无界海洋,当引潮力的波速与自由波波速相同以及对有界海洋,当引潮力频率与海区的固有振动频率相接近时,海洋对于引潮力作用的反应最为强烈,故称之为共振响应。此时所出现的潮汐运动,即为共振潮。因为每个大洋或海区的固有振动频率是各不相同的,故每个大洋或海区的优势分潮也必然彼此不同。

**3. 微弱响应** 当  $\sigma \rightarrow \infty$ , 或  $\sigma \gg ck$  时,则  $u \approx 0$ ,  $\zeta \approx 0$ 。也就是说,在引潮力的周期无限小时,对无界海洋引潮力波速远大于自由波速以及对有界海洋引潮力频率远大于海区的固有振动频率时,海洋对于引潮力的作用几乎没有反应。亦即:当引潮力场的变化太迅速时,海洋对如此快速变化着的引潮力场的作用根本无法进行响应,故称之为微弱响应。当然,对于实际海洋,这种情况并不存在。

由于实际海洋都是有界的,所以其对于引潮力作用的响应,仅是频率的响应。这也告诉我们,当把引潮力进行谐波分析时,不能只看其分力力幅的大小来决定其是否重要,而应看其频率是否与海区的某固有振动频率相接近,因为,只有那些与海区的固有振动频率相接近的分力才是重要的。上面已证明过,当引潮力分力的频率远大于或远小于固有振动频率时,尽管其力幅较大,但其所输送给海水的周期平均功率几乎均为零。而当引潮力分力的频率与固有振动频率相接近时,尽管其力幅较小,而其所输送给海水的周期平均功率则最大。

#### (四) 对引潮力作用反应的复杂性

由式 (1.6) 和 (1.7) 可知,无界海洋对于引潮力作用的反应非常简单,仅产生单一的强迫进行波,其频率、波长皆与引潮力波相同,其振幅也不是空间  $x$  的函数。由于摩擦力的存在,使其产生了初位相  $\beta$ , 而且,当  $\sigma < ck$ , 即当引潮力波速小于自由波速时,将出现倒潮。

由式 (2.4), (2.5), (2.6) 及 (2.7) 可知,封闭海洋对于引潮力作用的反应是非常复杂的,其潮波运动不是单一的进行波或驻波,而是由两者迭加而成。其中,进行波分为两种:一种是周期、波长皆与引潮力波相同;另一种则是周期与引潮力波相同,而其波长则与水深  $h$  及摩擦系数  $\mu$  有关,其振幅随空间  $x$  的增加而呈指数衰减。驻波,则是由这样的两种进行波与其反射波的迭加而成。由此可见,尽管作用于封闭海洋水体上是单一的引潮力谐波,其所产生的潮波则是由复合的进行波和驻波迭加而成的非常复杂的复合波。其进行波的振幅、波长皆是空间  $x$  的函数,初位相则仅与摩擦系数  $\mu$  及引潮力频率与固有振动频率的差值有关;其驻波则更为复杂,其波长与海区的水平尺度  $l$  有关,其振幅则不仅与  $l$  有关,还与空间位置  $x$  有关,其初位相除与摩擦系数  $\mu$  及引潮力频率和固有振动频率差值有关外,还与空间位置  $x$  有关。

这表明,尽管封闭海洋的形状很规则,水深为常量,引潮力的分布均匀,但其潮能的分

配并非均匀,而是因地而异,形成了统一的潮汐运动场。也就是说,海区中任一点的潮汐运动都不是孤立的,而是其整体的复杂的潮汐运动场的有机组成部分。这一结论,一方面解释了实际海洋(包括赤道区在内)中的潮汐运动的错综复杂性;另外还表明,在研究实际海洋中任一点的潮汐运动时,都不应以当地引潮力为指标进行孤立地研究,而应把它作为整个潮汐运动场的有机组成部分加以分析研究。

实际上,每个海洋都不是完全密闭的,因此,实际海洋的潮汐运动较封闭海洋更为复杂。由式(3.4)和(3.5)可知,半封闭海洋中的潮汐运动,是由引潮力直接作用而产生的独立潮和由其邻近海域所传入的协振潮迭加而成的。对于太平洋、大西洋和印度洋,就其整体来说,由于海域极其广阔,故独立潮占绝对优势,其协振潮可以忽略不计。然而,在它们与邻近海洋相联系的海峡、通道口附近,则其协振潮就不可忽略不计了。就南海而言,由于海区不大,所以其独立潮与协振潮同等重要,因而其潮汐运动更加复杂。而且,在南海与太平洋、印度洋相联系的海峡附近,协振潮占优势。象地中海、波罗的海这样一些小海域,一方面其独立潮十分微弱;另外,由于它们与大洋相联系的海峡很狭窄,除在其海峡附近潮汐运动较显著外,其内部的潮汐运动必然既微弱又复杂。

### (五) 协振潮的基本特征

在半封闭海区,当其协振潮占优势而独立潮可以忽略不计时,其潮汐运动就比较简单些。在式(3.4)和(3.5)中去掉  $F_0$  项,则有

$$u = -\zeta_0 \frac{c}{h} \left(1 + \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ e^{-\alpha_1 x} \sin(\sigma t - \alpha_1 x - \nu) - e^{-\alpha_2 l} \sqrt{\frac{B_x}{B_l}} \sin(\sigma t - \alpha_1 l - \nu + \vartheta_x - \vartheta_l) \right\}, \quad (3.6)$$

$$\zeta = \zeta_0 \left\{ e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \alpha_1 x) - e^{-\alpha_2 l} \sqrt{\frac{A_x}{B_l}} \sin(\sigma t - \alpha_1 l + \eta_x - s_l) \right\}. \quad (3.7)$$

事实上,只要在运动方程(3.1)中去掉引潮力项,就可以求得(3.6)和(3.7)式。

对于陆架海区,若其固有振动频率较引潮力频率大得多,则接近于平衡响应;或者,其固有振动频率虽然与引潮力频率相接近,但由于摩擦消耗作用很强,即摩擦系数  $\mu$  值很大,故其独立潮往往较协振潮弱得多,因而可以对其独立潮部分忽略不计。因此,对协振潮运动的基本特征进行分析讨论,是很有意义的。

由式(3.6),(3.7)可知,如同独立潮一样,协振潮波也是由进行波和驻波的迭加所组成,只是其进行波和驻波较前者简单些而已,即协振潮较独立潮的运动形态简单。由此可以推断,那些协振潮占绝对优势的陆架海区,其潮汐运动要较大洋简单。

与独立潮一样,协振潮潮差(流)的大小、高潮间隙及潮令,也都是空间地点  $x$  的函数。除此以外,协振潮还有以下特点。

1. 协振潮波中所含有的进行波和驻波的成分,并不是固定不变的,是随空间  $x$  的不同而不断改变着的。如,在湾口附近,其进行波最强,驻波最弱;而随着离湾口距离的增大,其进行波呈指数衰减,而驻波则不断加强。

由于协振潮中其驻波的振幅与  $e^{-\alpha_2 l}$  成比例,故当  $l \rightarrow \infty$  时,其驻波振幅为零。由此

可见,世界各大洋区通过海峡、通道所传入的协振潮波中,皆只有进行波一种成分。而对于陆架海区,其协振潮就必然具有进行波、驻波这样两种成分,只不过其水平尺度  $l$  越长,其驻波成分愈弱而已。

2. 在独立潮中,其进行波中的潮位与潮流是同步变化的;而其驻波部分则不然,其潮位与潮流的位相差为  $\pi/2$ 。协振潮则与此相反,其驻波部分,潮位与潮流是同步变化;而其进行波部分,则潮位与潮流的位相差为  $\pi/2$ 。如在湾口处,潮位为余弦波,潮流则为正弦波(其中还含有微弱的驻波)。如以渤海海峡为例,在渤海区的涨潮期间,海峡为西向流,此时海峡水位下降,为落潮;在渤海区的落潮期间,海峡为东向流,此时海峡水位上升,为涨潮。这一特点,已为实测资料所证实,而且也符合动能与势能相互转化的规律。

### 三、结 语

本文通过一维潮波强迫阻尼振动方程组的求解,分析了海洋对于引潮力作用的反应情况。结果表明,无界海洋对引潮力作用的反应最简单,仅产生一种单一的强迫进行波。而封闭海洋的反应则非常复杂,产生的是复杂的进行波和驻波两种波动。尽管海区中任一点潮汐运动的周期皆与引潮力的周期相同,然而其每点潮汐运动的强弱、高潮间隙、潮令则彼此不同,因地而异。文中并指出,这种差别的产生与引潮力本身无关,摩擦力在其中虽然也起了一定的作用,而关键却在于海区所形成的特定形式的潮波运动场,海区中每一点的潮汐运动都是其整个潮波运动场的有机组成部分。

对于半封闭海洋,其潮汐运动较封闭海洋更为复杂。这表明,对那些独立潮和协振潮同样重要的海区,其潮汐运动最为复杂。由此可以推想,对于那些协振潮占绝对优势的陆架海区,其潮汐运动反而较大洋要简单些。

文中还指出,平衡潮与动力潮之间并无本质区别,平衡潮乃是一种特殊的动力潮而已。根据其平衡潮的判别条件,世界上各大洋区皆不能出现平衡潮,而那些小而浅的湖泊则可满足这个条件,出现平衡潮。

关于摩擦力在受迫振动中的作用,文中也进行了论述。海洋的潮汐运动,无疑是一种稳态的受迫振动,而在研究稳态受迫振动时,若不考虑摩擦力的作用,是不可能真实地揭示出该振动系统的运动规律,获得圆满结果的。

地球上的实际海洋,其岸形极不规则,海底起伏不平,岛屿星罗棋布,海水密度又不均匀,引潮力的分布也随纬度而异,还有柯氏力的作用等等。因此,实际海洋(包括赤道区在内)中的潮汐运动是非常错综复杂的。

### 参 考 文 献

- [1] Cartwright, D. E., 1969, Deep Sea Tides. In "Oceanography-Contemporary Readings in Ocean Sciences" Edited by R. Gordon Pirie, Oxford University Press, London 1973, pp. 148—158.
- [2] ———, 1978, Oceanic Tides. *The International Hydrographic Review* 55(2): 35—84.

## A PRELIMINARY STUDY OF THE RESPONSE OF THE OCEAN TO TIDE-PRODUCING FORCE

Xiu Richen

*(The First Institute of Oceanography, National Bureau of Oceanography)*

### ABSTRACT

In this paper, the solution of one-dimensional equations of forced damping oscillation is obtained, and the response of ocean to the tide-producing force is discussed.

The response is simple in boundless ocean with simple forced progressive wave, but much complicated in closed ocean with multiple progressive waves and stationary waves. In a semi-closed sea, the movement of tidal waves consisting of co-oscillating tide and independent tide is very complicated, with the former tide being simpler than the latter.

The analysis of the response function of tidal waves shows that there is no essential difference between the equilibrium and dynamic tides, the former is only a particular case of the latter.

In addition, the contribution of frictional force to the forced oscillation is also discussed.