

海水中 A3 钢样阴极保护电化学场的二维有限元计算

王在峰^{1,2,3}, 孙虎元¹, 孙立娟¹

(1. 中国科学院 海洋研究所, 山东 青岛 266071; 2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039; 3. 中海实业信息技术开发分公司, 北京 100016)

摘要: 有限元法已被证明是计算阴极保护场中电位、电流密度分布的有效方法。作者建立了二维的有限元数学模型, 并讨论了模型中电化学场的非线性边界条件的处理和非线性方程组的迭代法解法。用构建的模型对简单的阴极保护模拟体系进行了分析, 得出了较合理的结果。

关键词: 有限元; 阴极保护; 非线性边界条件; 迭代法

中图分类号: TG174.41 文献标识码: A 文章编号: 1000-3096 (2006) 07-0038-05

实海情况下被保护的结构复杂而庞大, 单靠测量得出阴极保护的电化学场是不现实的。但是可以通过有限元计算求出其电化学场, 此电化学场对于优化阴极保护系统, 评价腐蚀状况, 研究腐蚀规律具有重要作用。Raymond 等人^[1~6]都对有限元法计算阴极保护电化学场进行了研究。一些商业化的有限元分析软件 ANSYS、FEPG 等已用于平台井套管的阴极保护计算。但是对如何处理非线性边界条件以前的研究涉及的不多。作者对二维条件下的阴极保护电化学场进行了计算, 并特别讨论了非线性边界条件解法。

1 数学模型的建立

二维坐标系中, 阴极保护体系中的电位分布服从

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2} = 0 & \text{域内} \\ E = E_0 & \text{边界 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ \frac{\partial E}{\partial n} = \frac{i(E)}{\sigma} & \text{边界 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

Laplace 方程

E 为电位, σ 腐蚀介质电导率, $i(E)$ 为实验测得的极化曲线函数关系式, n 为边界内法线方向。用有限元法解上面偏微分方程时需化成求其等价泛函的极小值 MIN 。

$$\begin{cases} f(E) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial Y} \right)^2 \right] dXdY + \int_{S_2} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2 = MIN \\ E = E_0 \end{cases} \quad (2)$$

为求 $f(E)$ 的极小值, 选用三角形单元分割求解区域, 将整个域划分成 M 个单元, n 个顶点, $f(E)$ 可以表示成单元泛函的和:

$$f(E) = \sum_{e=1}^M f^e(E) \quad (3)$$

$$f^e(E) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial Y} \right)^2 \right] dXdY + \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e$$

其中 e 代表一个单元, 要使 $f(E)$ 达到极小值需满足

$$\sum_{l=1}^M \frac{\partial f^e(E)}{\partial E_l} = 0 \quad (l=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

将上式化成与结点相关的形式, 在每个单元内构造插值函数。设

$$E(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \quad (5)$$

收稿日期: 2004-05-26; 修回日期: 2004-08-18

作者简介: 王在峰 (1980-), 男, 山东莱芜人, 硕士, 主要从事海洋腐蚀与防护技术应用, 电话: 010-84525113, E-mail: wangzfl@cnooc.com.cn

假设 i, j, m 三点的电位 E_i, E_j, E_m 为已知数, 可求出 三角形内任一点电位:

$$E(x, y) = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta} E_i + \frac{(a_j + b_j x + c_j y)}{2\Delta} E_j + \frac{(a_m + b_m x + c_m y)}{2\Delta} E_m \quad (6)$$

其中设

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad a_j = x_m y_i - x_i y_m, \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad b_m = y_i - y_j$$

$$c_i = x_m - x_j, \quad c_j = x_i - x_m, \quad c_m = x_j - x_i, \quad \Delta \text{ 为三角形}$$

面积

(6) 式简写成

$$E(x, y) = N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m \quad (7)$$

为导出 (4) 式的具体形式, 将插值函数代入各单元, 并对该单元中每个顶点的电位 (E_i, E_j, E_m) 求偏导。对于非边界元素(泛函第二项为 0)求导的形式如下:

$$\frac{\partial f^e(E)}{\partial E_i} = \frac{\partial}{\partial E_i} \frac{1}{2\Delta} \iint \left[\left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial Y} \right)^2 \right] dXdY \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_i} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{a}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i^2 E_i dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i N_j E_j dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i N_m E_m dS_2^e \quad (12)$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial E_j} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{a}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_j dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_j^2 E_j dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i N_j E_i dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_j N_m E_m dS_2^e \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_m} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{a}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_m dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_m^2 E_m dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_i N_m E_i dS_2^e + \frac{2b}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} N_j N_m E_j dS_2^e \quad (14)$$

将各单元的分析结果扩展到整个区域, 根据多元函数求极值, 令总泛函对各接点电位偏导为 0, 将各单元叠加则可得到总线性方程组:

$$[K]\{E\} = [W] \quad (15)$$

所以

$$\frac{\partial f^e(E)}{\partial E_i} = \frac{b_i^2 + c_i^2}{4\Delta} E_i + \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta} E_j + \frac{b_i b_m + c_i c_m}{4\Delta} E_m \quad (9)$$

同理

$$\frac{\partial f^e(E)}{\partial E_j} = \frac{b_j b_i + c_j c_i}{4\Delta} E_i + \frac{b_j^2 + c_j^2}{4\Delta} E_j + \frac{b_j b_m + c_j c_m}{4\Delta} E_m \quad (10)$$

$$\frac{\partial f^e(E)}{\partial E_m} = \frac{b_m b_i + c_m c_i}{4\Delta} E_i + \frac{b_m b_j + c_m c_j}{4\Delta} E_j + \frac{b_m^2 + c_m^2}{4\Delta} E_m \quad (11)$$

而对于边界元素求导, 第一项与非边界元素完全相同, 同时还要考虑 $f^e(E)$ 式第二项。当阴极保护场中被保护体表面的极化电流与极化电位为线性关系 $i(E) = a + bE$ 时,

而阴极保护体系中边界条件是非线性的 $i(E) = Ae^{BE}$ 的指数形式, A, B 为系数, 则 $f^e(E)$ 式第二项求导为以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial E_i} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{A}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} \left[Be^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} (N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m) N_i + e^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} N_i \right] dS_2^e \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_j} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{A}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} \left[Be^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} (N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m) N_j + e^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} N_j \right] dS_2^e \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial E_m} \int_{S_2^e} \frac{i(E)}{\sigma} EdS_2^e = \frac{A}{\sigma S_2^e} \int_{S_2^e} \left[Be^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} (N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m) N_m + e^{B(N_i E_i + N_j E_j + N_m E_m)} N_m \right] dS_2^e \quad (18)$$

令总泛函对各接点电位偏导为 0, 将各单元叠加则可得到总的方程组:

$$[K]\{E\}=[W]$$

(19) 化趋于均匀,坐标6处没有出现大的突跃。

方程组右边组合了非线性边界条件,此方程组为非线性方程组。在用迭代法^[7]直接解此方程组之前,可以先假设边界条件为线性极化解出一组电位值作为迭代的初始条件,这样大大减少了迭代次数。

2 应用算例

以模拟海水全浸区长条状 A3 钢阴极保护为例,实体模型见图 1, A3 钢条置于塑料容器底,用环氧树脂封装以减少分析中的边界面和计算误差,工作面用砂纸打磨平整。实验用海水电导率为 0.045 S/cm。将图 1 中的物理模型以三角形单元剖分,共剖分成 200 个单元,100 个顶点,剖分后的有限元模型见图 2。用 C 语言编写程序,拟合得到的近似线性条件 $i(E) = -8 \times 10^{-5} - 6 \times 10^{-5} E$ 构造线性方程组,非线性边界条件 $i(E) = 10^{-9} e^{-9.6159 E}$ 构造非线性方程组,将线性方程组的解带入非线性方程组中迭代求解。

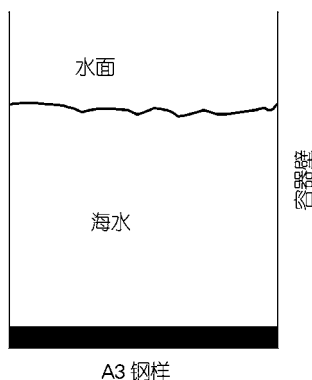


图 1 全浸区物理模型

Fig.1 Physical model of submerging area

牺牲阳极(电位为-1V)在点 25 时计算得到的电位分布如图 3 所示,出现旋涡状电位分布,点 25 附近电位较负;以点 25 为中心电位几乎呈对称分布,由于钢条的极化作用靠近 A3 钢条的海水中电位分布较乱,离钢条远处电位线较均匀。

图 4 反映出由于牺牲阳极个数增加,整个域内电位与图 3 相比电位普遍变负,对应于牺牲阳极位置出现两个旋涡状电位分布。当点 25, 28 各有一个牺牲阳极时,从图 5 可以看出由于牺牲阳极作用的相互叠加,钢条表面各点的电位变的更负,但是表面电位变

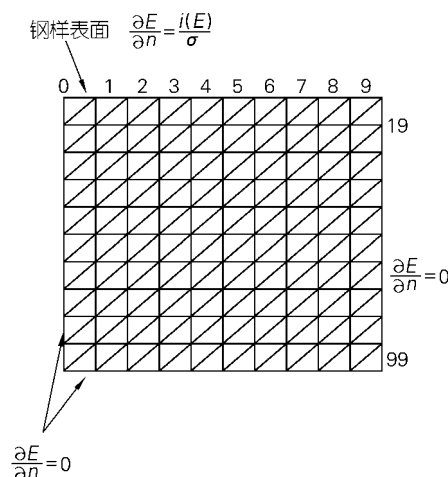


图 2 有限元模型

Fig.2 Finite element model

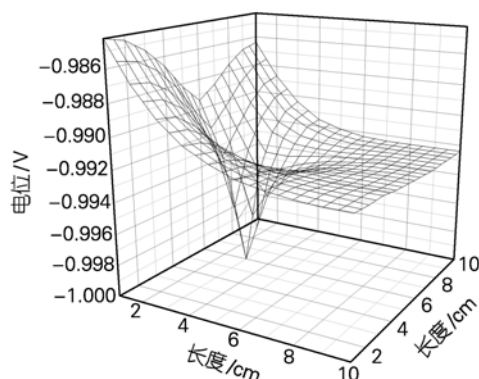


图 3 在 25 点有一牺牲阳极时电位分布

Fig.3 Potential distribution of one anode at NO. 25 point

图 6 是钢表层的电流密度分布图,由于牺牲阳极的叠加,两个阳极下电流密度大于一个阳极情况,但是电流密度变化趋于均匀。

由图 5, 图 6 通过多项式拟合分别得出金属表面的电位、电流密度分布方程,通过这些方程可以不通过有限元计算,只要符合以上的物理模型就可以用下面的多项式计算金属表面任一点的电位、电流密度分布。

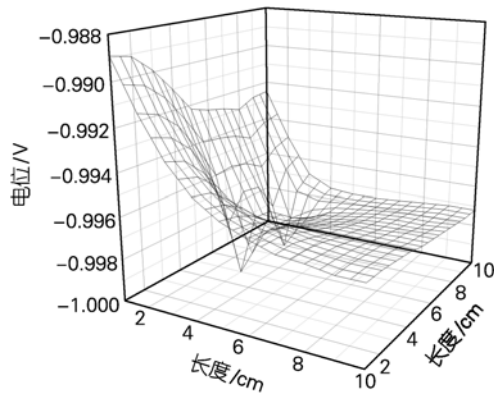


图 4 在点 25 和 28 各有一牺牲阳极的电位分布
Fig.4 Potential distribution of two anodes at NO. 25 and NO. 28 points

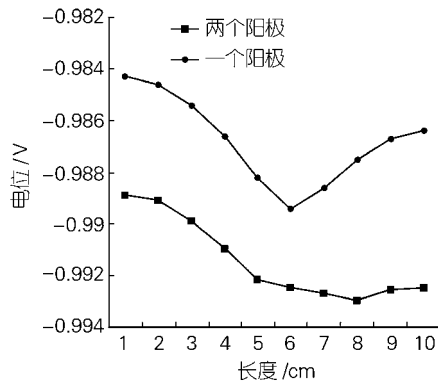


图 5 钢表层电位分布
Fig.5 Potential distribution of steel surface

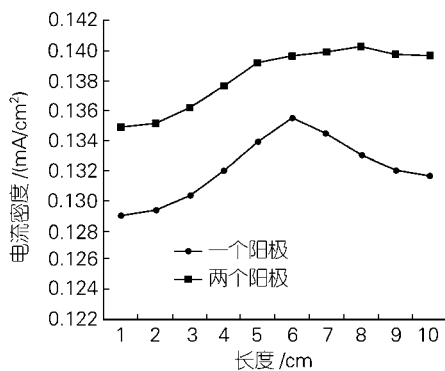


图 6 钢表层电流密度
Fig.6 Current density of steel surface

点 25、28 各有一牺牲阳极时金属表面电位、电流密度分布方程

$$E = 6 \times 10^{-8} X^6 - 2 \times 10^{-6} X^5 + 8 \times 10^{-6} X^4 + 9 \times 10^{-5} X^3 - 0.001 X^2 + 0.002 2 X - 0.990 2$$

$$i = -9 \times 10^{-8} X^6 + 2 \times 10^{-6} X^5 - 10^{-5} X^4 - 10^{-4} X^3 + 0.001 3 X^2 - 0.002 7 X + 0.136 4$$

点 25 有一牺牲阳极时金属表面电位、电流密度分布方程

$$E = 9 \times 10^{-7} X^6 - 3 \times 10^{-5} X^5 + 0.000 4 X^4 - 0.002 6 X^3 + 0.007 6 X^2 - 0.010 5 X - 0.979 2$$

$$i = -1 \times 10^{-6} X^6 + 4 \times 10^{-5} X^5 - 0.000 5 X^4 + 0.003 4 X^3 - 0.009 9 X^2 + 0.013 7 X + 0.1223$$

X 为沿金属表面的坐标, 固定物理模型下可以根据以上公式计算出金属表面任一点的电位和电流。如果通过有限元法建立多种物理模型下分布方程, 实际工程人员不需要进行有限元计算只要查表就可以找到对应的计算公式, 这将为工程设计带来极大的方便。

3 结论

作者成功地构建了 2-D 有限元模型, 此模型可对阴极保护保护的电位、电流分布进行计算, 并得到了较合理的结果。有限元方法对于腐蚀与防护中的非线性边界条件, 可以用迭代的方法解决, 采用先用线性边界条件计算迭代初始值的处理方法大大提高了迭代效率。算例中只计算了一支阳极和两支阳极的情况, 实际上对于任意阳极位置和数量、任意腐蚀介质和被保护体都可以进行计算。通过有限元法可以推导出不同阴极保护模型下的电位、电流分布简化计算公式, 这些公式对实际工程计算带来很大的方便。

参考文献:

- [1] Fu J W, Chow J S K. Cathodic protection designs using an integral equation numerical method[J]. **Materials Performance**, 1982,21(10): 8-12.
- [2] Munn R S. A mathematical model for a galvanic anode

- cathodic protection system[J]. **Materials Performance**, 1982,21(8): 29-36.
- [3] Fu J W, Chan S K. Finite element determination of galvanic corrosion during chemical cleaning of steam generator[J]. **Materials Performance**, 1986,25(3): 33-40.
- [4] 邱枫,徐乃欣. 码头钢管桩阴极保护时的电位分布[J]. 中国腐蚀与防护学报, 1997,17 (1): 12-18.
- [5] 邱枫,徐乃欣. 用带状牺牲阳极对埋地钢管实施阴极保护时的电位和电流分布[J]. 中国腐蚀与防护学报, 1997 ,17 (2): 106-110.
- [6] 邱枫,徐乃欣. 钢质储罐底板外侧阴极保护时的电位分布[J]. 中国腐蚀与防护学报, 1996 , 16 (1): 29-36.
- [7] 丁立娟. 数值计算方法[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1997.185-203 .

The application of 2-D finite element method in calculating cathodic protection fields of steel in marine environment

WANG Zai-feng^{1,2,3}, SUN Hu-yuan¹, SUN Li-juan¹

(1.Institute of Oceanology, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 2.Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China; 3.Information Technique Development Company of CNOOC Enterprises Corporation, Beijing 100016 , China)

Received: May, 26,2004

Key words: finite element ; cathodic protection ; no-linear boundary condition ; iterative method

Abstract : The 2-D finite element method was an effective method to calculate the potential and current density distribution of cathodic protection fields. The author developed a mathematical model of 2-D finite element, especially discussed how to deal with no-linear boundary conditions of electrochemical fields and used iterative method to solve no-linear equation groups. A simple simulated CP example was analyzed through this model and proved that the finite element was a powerful tool.

(本文编辑: 张培新)