



三维数值模式用于海底摩擦系数的研究

虞旭日 汪景庸

(青岛海洋大学, 266003)

收稿日期 1990年7月14日

关键词 海底摩擦, 拖曳系数

提要 本文讨论了在风暴潮和潮汐作用下海底摩擦力与平均流速的关系公式, 即 $\vec{\tau}_b = C_b \rho |\vec{v}| \cdot \vec{v}$; 利用湍流能量损耗理论得到了一个新的求拖曳系数 C_b 的公式; 并且通过一个三维模式, 在理想的矩形海区中计算了各种条件下的 C_b 分布。

底摩擦的研究是海洋动力学的重要课题之一, 但是, 以往人们对 Taylor 的二次律公式

$$\vec{\tau}_b = C_b \rho |\vec{v}| \cdot \vec{v}$$

中的拖曳系数 C_b 却研究得很少。本文认为 C_b 与台风的风速、风向、海域特征以及潮汐周期等因素有关, 给出了一个计算此系数的理论公式, 并利用一个三维模式^[1]研究了理想矩形海域在风暴作用下的拖曳系数分布。

I. 拖曳系数公式的导出

根据 Hinze (1958) 湍流中的平均动能方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) - f(\delta_{i1} v_2 - \delta_{i2} v_1) v_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\frac{P}{\rho} v_i \delta_{ij} + \frac{2\mu}{\rho} v_i \varepsilon_{ij} - \overline{v_i v_j v_i} \right] \\ & \quad - \frac{2\mu}{\rho} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \overline{v_i v_j \varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, v_i 为雷诺平均速度; v'_i 为湍流脉动速度; f 为科氏参数; P 、 ρ 和 μ 分别为压强、密度和分子粘性系数。 ε_{ij} 和 δ_{ij} 定义如下:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

显然, (1) 式中最后一项为湍粘性耗损。

在 xoy 平面上, 截面为单位面积的任一 z 向柱体的湍流能量损耗为:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \rho \int_{-h}^{\xi} (\overline{v'_i v'_j \varepsilon_{ij}}) dz \\ &= \left[\int_{-h}^{\xi} \left[\frac{1}{2} \overline{u' u'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{u' v'} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{u' w'} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{v' w'} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{w' u'} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{w' v'} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{-h}^{\xi} \overline{w' w'} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \right] \cdot \rho \end{aligned} \quad (4)$$

其中 u, v, w 为各平均速度分量, u', v', w' 为各湍流速度分量。

根据量级分析, 整理化简得:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &\approx \int_{-h}^{\xi} \left(u' w' \frac{\partial u}{\partial z} + v' w' \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cdot \rho dz \\ &= \rho \int_{-h}^{\xi} k \left[\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^3 + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^3 \right] dz \end{aligned} \quad (5)$$

上式推导过程应用了普朗特混合长度理论。

另一方面,全流动力方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + f(\delta_{i2}\bar{v}_1 - \delta_{i1}\bar{v}_2) \\ = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho H} (\tau_i^\zeta - \tau_i^{-h}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\bar{v}_i$ 为垂直平均速度分量; τ_i^{-h} 为底摩擦分量。根据 Taylor^[10] 的经验公式:

$$\tau_i^{-h} = C_b \rho |\bar{v}| \bar{v}_i \quad (7)$$

将式(6) $\times \rho \bar{u}_i (h + \zeta)$, 即得到用平均流速表示的在 xoy 上,截面为单位面积的任一 z 向柱体上的摩擦损:

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= \rho \cdot \bar{v} \cdot C_b |\bar{v}| \bar{v} \\ &= \rho \cdot C_b (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

在理论上,利用 Hinze^[4] 的理论在海洋学上的推广,在某一海区中的总能量消耗为:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (9)$$

其中 θ_1 , θ_2 和 θ_3 分别表示垂直湍粘性耗损、侧向湍粘性耗损和内能转换耗损。

另一方面,某一海区整体能量耗散应为湍动和分子力所引起的耗散,即 ΔE_2 。故有:

$$\theta = \Delta E_2 \quad (10)$$

由于(9)式中的后两项的量级远远小于第一项(对于时间尺度为 1d 的运动过程)故有近似公式:

$$\theta_1 \approx \Delta E_1 \approx \Delta E_2 \quad (11)$$

由(6),(8)和(11)式可得

$$C_b = \int_{-h}^{\zeta} k \left[\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|^2 \right] dz / (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

II. 动力学方程组及其差分格式

在提出动力学方程组之前,给出以下物理假设: 1) 中、小尺度海区,忽略地球的曲率;2) 海水密度为常数;3) 仅考虑铅垂方向湍的作用。

在 f 平面上建立笛卡尔坐标系, x, y, z 轴分别为垂直于海岸、沿岸方向和垂直于静止海面向上,坐标原点 o 在静止时的海平面上。

在以上假设条件下,动力学方程为:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v dz = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v \\ = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u \\ = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + w \frac{\partial E}{\partial z} \\ = k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial E}{\partial z} \right) - \epsilon \end{aligned} \quad (16)$$

其中,(13)式为连续方程,(14)和(15)式为 x 和 y 方向的动量方程,(16)式为湍密度方程。 u, v, w 为速度分量; φ 为水位升高; f 为科氏参数; k 为湍能交换系数。

根据 Prandtl^[9] 的思想,用 k 代替湍粘性系数,并假设 k 与湍能密度的关系如下:

$$k = \gamma + C^{1/4} l E^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

其中 γ 为分子粘性系数; l 为混合长度。根据 Launder 和 Spalding^[7], 常数 C 取为 0.04, 根据 Vager 和 Kagan^[11], 混合长度为:

$$l = - \frac{k E^{1/2} l^{-1}}{\frac{d}{dz} (E^{1/2} \cdot l^{-1})} \quad (18)$$

其中 k 为 Von. Karman 常数, 取 $K = 0.4$ 。

另外,(16)式中的 ϵ 为分子粘性所致的湍能扩散率,取:

$$\epsilon = C^{3/4} E^{3/2} / l_0 \quad (19)$$

为了便于研究,取理想的矩形海区,西边为封闭的岸界,东、南和北三面为水界。岸界处取无穿透的边界条件,水界处取辐射边界条件。即:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} - [g/h]^{1/2} \cdot \zeta = 0 \quad (\text{水界}) \quad (20)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \quad (\text{岸界}) \quad (21)$$

式中“—”表示垂直方向的平均值。

海面与海底处的边界条件:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w \quad z = \zeta \quad (22)$$

$$u = v = w = 0, z = -h \quad (23)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0, z = -h \text{ 和 } z = \zeta \quad (24)$$

$$k\rho\left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = (\tau_x^z, \tau_y^z), z = \zeta \quad (25)$$

出于对数值计算上的考虑,我们将垂直坐标做以下两种变换:

$$1) \sigma = (h + z)/(h + \zeta),$$

$$2) \sigma + \sigma_0 = \sigma_0 \exp[\phi(\xi)],$$

其中, $\phi(\xi) = \xi - \frac{1}{2\xi_h}(1 - \sigma)\xi^2$,

$$\xi_h = 2\ln(1 + 1/\sigma_0)(1 + \sigma_0) \quad (\sigma_0 \ll 1).$$

通过第二种变换,我们使海面 and 海底附近的水域得到较详尽的考虑。

本文采用交错网格,理想的矩形计算海区尺度为 $450 \times 300\text{km}^2$ 。空间步长为

$$\Delta x = 15\text{km}, \Delta y = 10\text{km},$$

深度分为 10 层。

至此,我们建立了三维差分模式,首先用动力学差分方程组求得流速及湍粘性系数,然后用求拖曳系数的公式(12)式计算出区域内的拖曳系数分布。

III. 计算结果及公式的验证

我们取海面风速 $v_R = 30\text{m/s}$,风向垂直海岸,海深 $H = 40\text{m}$,结果如图 1~2 所示。

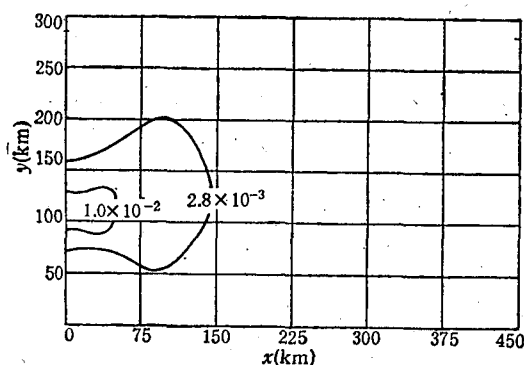


图 1 C_b 在整个海区的分布

Fig. 1 C_b distribution within area concerned

如图 1~2 所示,除了在西岸界附近偏南的一小部分海域 ($0 \leq x \leq 50\text{km}$; $90\text{km} \leq y \leq$

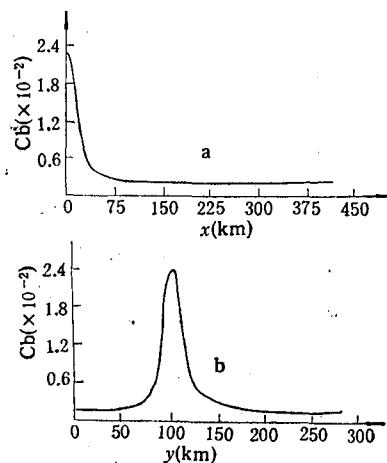


图 2 C_b 沿 X, Y 方向的分布

Fig. 2 C_b curve in direction X and Y

a. 沿 X 方向分布(通过奇异值点), b. 沿 Y 方向的分布。

125km) 外(这里的拖曳系数另文讨论),大部分海区拖曳系数的分布是非常均匀的,其值为 2.7×10^{-3} 。这一值与 Taylor 给出的值非常接近^[10],同时也被许多学者在数值模拟中采用^[2-5,8],这也说明了本文推导的求拖曳系数的公式是正确和可用的。

现在给出用此公式求得的拖曳系数与海水深度的关系,取 $v_R = 30\text{m/s}$,风向垂直海岸,分别计算水深 10~50m 的情况,结果见表 1。

表 1 C_b 值随海水深度的变化

Tab. 1 C_b variation with sea depth

海区深度 (m)	10	20	30	40	50
$C_b (\times 10^{-3})$	3.41	2.97	2.84	2.73	2.68

从计算结果可以看出,水深为 10~50m 时,拖曳系数在整个海区的分布与图 1 相似,即除了在西岸界附近偏南的极小部分海域外,在其它大部分海域拖曳系数的分布都是均匀的。随着海水深度的增加,拖曳系数值逐渐减小。从表 1 可以得到 C_b 值大约与水深的 1/6 次方成反比,即 $C_b \propto H^{-1/6}$ 。这个结果与海洋学家公认的规律是相似的。

另外,我们计算了拖曳系数与台风风速和风向的关系(图 3),从图 3 可以看出, C_b 随风

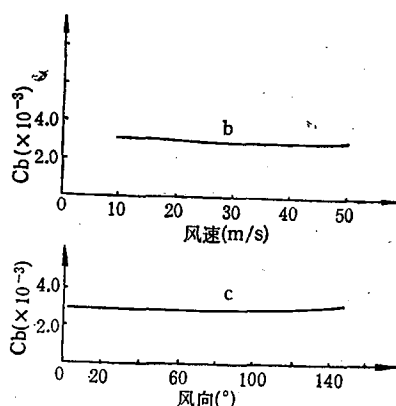


图3 C_b 与风速、风向的关系

Fig. 3 Relationship of C_b and velocity and direction of storm

a. C_b 与风速的关系 ($H = 15\text{m}$); b. C_b 与风向的关系。速的增加而减小,但这种变化很小,以致可以忽略不计; C_b 随风向的变化仅有微小变化。总之,我们认为,在误差允许的范围内,同一海区中的 C_b 值不随风速风向变化。

另一方面,由于风速、风向与风暴潮流直接相关,拖曳系数与风速风向无关,也说明了拖曳系数与风暴潮流速无关,底摩擦公式

$$\vec{\tau}_b = C_b \rho |\vec{v}| \vec{v} = C_b F(\vec{v}_a, H, f, s) |\vec{v}| \vec{v}$$

中的 F 函数与 $|\vec{v}|$ 无关,即说明 τ_b 正比于平均潮流速的二次方,即 $\tau_b \propto |\vec{v}|^2$ 。这与 Taylor 和其他海洋学家的论点相符。

IV. 小结

本文利用湍流耗损理论导出了一个求拖曳

系数的公式,同时采用了一个三维数值模式,计算了在理想海域中拖曳系数的分布。通过对三种计算结果的分析,证实了所导出的求拖曳系数公式的正确性。

参考文献

- [1] 冯士琯, 1982. 风暴潮导论. 科学出版社, 1~241.
- [2] 汪景庸, 1985. 东中国海中风暴潮的一次数值模拟. 山东海洋学院学报 15(3): 41~46.
- [3] 方国洪, 杨景飞, 1985. 渤海潮汐运动的一个二维数值模拟. 海洋与湖沼 16(5): 337~347.
- [4] Flather, R. A., and Davies, A. M., 1976, Note on a preliminary scheme for storm surge prediction using numerical models, *Quart. J. R. Met. Soc.* 102(431): 123-132.
- [5] Heaps, N. S., 1969, A two-dimensional numerical sea model, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A265: 93-137.
- [6] Johns, B., Sinha, P. C., and Dube, S. K., 1983. Simulation of storm surge using a three-dimensional model: an application to the 1977 Andhra cyclone. *Quart. J. R. Met. Soc.* 109: 211-225.
- [7] Launder, B. E., and Spalding, D. B., 1972. Mathematical Model of turbulence. Imperial College of Science and Tech. 1-323.
- [8] Oey, L. V. and Meller, G. L., 1985. Tidal modelling of the Hudson-Raritan Estuary. *Estuarine Coastal and Shelf Science* 20(5): 511-528.
- [9] Prandtl, D., 1945. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, *Nachrichten von der Akd. der Wissenschaft in Göttingen* 26-41.
- [10] Taylor, G. I., 1919. Tidal friction in the Irish Sea. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, CCXX 1-99.
- [11] Vager, B. G., and Kagan, B. A., 1971. Vertical structure and turbulent regime in a stratified boundary layer of a tidal flow. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Fiz. Atmos. Okeana*, T. 766-777.

STUDY ON SEA-BOTTOM FRICTION COEFFICIENT BY APPLICATION OF THREE-DIMENSIONAL MODEL

Yu Xuri and Wang Jingyong

(Ocean University of Qingdao, 266003)

Received: July 14, 1990

Key Words: Ocean bottom friction, Drag coefficient

Abstract

Formula of relation between ocean bottom friction and mean current velocity under storm surge and tide is that $\vec{\tau}_b = C_b \rho |\vec{v}| \cdot \vec{v}$. A new formula for drag coefficient is obtained through torrent energy loss theory. Various C_b distribution under ideal rectangle sea areas is calculated by a three-dimensional space. Correctness and practicality of the formula is proved.