

海水垂直运动中的状态研究

娄宁伟 许习华

(国家海洋环境预报中心, 北京)

收稿日期 1989年2月14日

关键词 垂直运动, 上升流, 分岔

提要 借用非线性常微分方程的定性分析理论对海水垂直运动的稳定性进行了研究。结果表明, 海水密度垂直方向上的非线性分布能使海水在密度稳定层化下的水体成为不稳定的上升流(或下沉流); 而在海水密度不稳定层化时, 也能存在垂直运动的稳定平衡态。在一定条件下, 这种海水垂直运动还会出现平衡态的分岔现象。当初始运动状态不满足静力平衡时, 并且这种静力偏差达到一定的强度时, 上升流的平衡态还会发生月尖型突变(CUSP)。

在垂直对流运动中, 对上升流问题的研究归结为对海水质点在上升运动过程时自身变化规律所呈的重力大小与环境海水对该质点的浮力大小的差异, 也就是质点运动时密度的个别变化与环境海水密度的比较(从热力学角度看)。我们将简单地讨论在上升流运动中, 由于环境海水密度垂直方向的非线性分布所造成的各种平衡态下的失稳、分岔与突变现象, 并结合物理现象进行讨论。

I. 物理模型

海水中的对流可造成上下层海水之间强烈的混合, 这种对流混合与海水的稳定度有密切的关系。我们可以看到, 在夏季海洋里, 对流混合很难出现, 而最强烈的混合作用总是出现在冬季, 这是因为冬季海表面因结冰等原因而使海水温度下降, 盐度增加, 表面海水密度加大, 海水层结不稳定加强。这种对流混合随着纬度加强而加强, 如, 在大西洋高纬海区, 冬季对流深度可达到几千米的深度, 形成均匀而强大的深水层; 在南极威德尔海内, 冬季的对流一直扩

展到海底, 形成均匀的南极底层水。其实在高纬海区, 海水结冰亦有重大的影响而导致中纬海区也能发生对流。另外, 中纬一些地区因海水表面盐度的增加也往往形成强烈的对流¹⁾。总之海水中的垂直对流现象可被看作是由水体重力与浮力的差异所造成的, 也就是说可以用下面的方程来描述此对流过程:

$$\frac{dw}{dz} = -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dz} \quad (1)$$

式中 ρ_0 为水体的密度, P 为环境海水的水压, w 为水体的上升速度, 这里的坐标选取与一般海洋问题有所不同, 即纵坐标取从海底向上为正方向。为了方便起见, 以下的垂直对流运动过程均在 $w > 0$, 即在仅考虑上升流的前提下进行讨论, 反之与其结论相反。

假定水体的上升运动是发生在单位水体做绝热上升运动的封闭系统中, 即水体在上升过程中不与环境海水发生热盐变换的混合作用。则它在运动过程中密度变化为:

1) 山东海洋学院, 1982. 海洋学讲义。

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0 - \nu_0 \delta z \quad (2)$$

$\bar{\rho}_0$ 为水体在初始位置及初始时刻的密度, ν_0 为单位水体的密度递减率, δz 为单位水体在垂直方向上的位移。

II. 数 学 模 型

环境海水在平静状态下是满足静力平衡的, 即:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g \quad (3)$$

ρ 为环境海水的密度, 把它在 z_0 对应的密度 (环境海水的) $\bar{\rho}_0$ 附近展开:

$$\begin{aligned} \rho \approx \bar{\rho}_0 + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} (\delta z)^2 \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial z^3} (\delta z)^3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

将(2),(3),(4)代回(1)中, 并令 $\xi = \delta z > 0$, 则

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} (\alpha + \beta \xi + \eta \xi^2 + \zeta \xi^3 + \dots) \quad (5)$$

其中

$$\alpha = \bar{\rho}_0 - \rho_0, \quad \beta = \nu_0 - \nu, \quad \nu = -\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}, \quad \zeta = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial z^3}.$$

为了方便起见, 将(5)式中分母 ρ_0 用 $\bar{\rho}_0$ 代替并取为常数不影响问题的讨论则(5)可化为:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} (\alpha + \beta \xi + \eta \xi^2 + \zeta \xi^3 + \dots) \quad (5)'$$

方程 (5)' 即为控制水体垂直运动稳定性的方程, 可见影响其稳定性的因子有, 初始时刻水体是否处于静力平衡状态 (α); 水体密度的个别变化与海水密度的层结比较以及海水层结的非线性分布。

III. 线 性 分 析

当 $\eta = \zeta = 0$ 时, 即海水的密度层化仅是 $\xi = \delta z$ 的局部线性函数, 这时垂直加速度也仅是 ξ 的线性函数——线性运动。

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} [\alpha + \beta \xi] \quad (6)$$

式中 $\alpha = \bar{\rho}_0 - \rho$ 代表海水上升流初始时非静力平衡的程度, 而 $\beta = \frac{d\rho_0}{dz} - \frac{\partial \rho}{\partial z}$ 为海水层化与水体密度变化的比较。

当 $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 时,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} \alpha \quad (7)$$

即, 当初始状态为非静力平衡时, 且这种非静力平衡能维持时, 则这种对流运动恒为不稳定的, 亦即恒有持续的上升流或下沉流。应当注意我们的讨论是限定在 δz 的邻域内。

当 $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 时,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} \beta \xi \quad (7)'$$

显然 $\xi = 0$ 是此时的唯一定态点, 且, $\beta > 0$ 时为不稳定平衡态, 即海水密度在不稳定的层结分布条件下, 存在显著的上升流; $\beta < 0$ 时为稳定平衡态, 即海水密度在稳定层化分布条件下不存在上升流; $\beta = 0$ 为中性状态。其平衡态性态的变化可参见图 1。

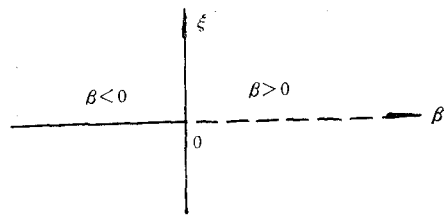


图 1 线性垂直运动

——稳定态; ----不稳定态

Fig. 1 Stabilities of linear vertical motion

当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 即方程化为:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} \xi_1 \quad (7)''$$

式中 $\xi_1 = \xi + \frac{\alpha}{\beta}$, (7)'' 完全类似于 (7)', 故讨论结果也就完全类似。

从上面的讨论可以看出, 当把上升流的运动简单地考虑为线性问题时, 只有 $\xi = 0$

(或 $\xi = -\frac{\alpha}{\beta}$) 这一个平衡态, 运动的稳定与否取决于层化对比参数 β , 且当 $\beta < 0$ 转为 $\beta > 0$ 时, 将出现上升流的失稳, 即可能造成强烈的上升流运动。

IV. 非线性分析

如果在方程(5)中, η 或 ζ 不为零, 即海水在垂直方向上呈非线性状态分布时, 这时关于海水上升流稳定性的分析则为非线性问题。

$\zeta = 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \eta \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} (\alpha + \beta\xi + \eta\xi^2) \\ \frac{d\xi}{dt} = w \end{cases} \quad (8)$$

当 $\beta^2 - 4\alpha\eta < 0$ 时, (8) 式没有平衡态。当 $\beta^2 - 4\alpha\eta > 0$ 时, (8) 式出现两个平衡态 ξ_1, ξ_2 。式中,

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta}}{2\eta} \\ \xi_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta}}{2\eta} \end{aligned}$$

即,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} \eta (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \quad (8)'$$

令,

$$\xi^* = \xi - \xi_1 = \xi + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta}}{2\eta}$$

所以(8)'变成

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} \eta \xi^* \left(\xi^* - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta}}{\eta} \right) \\ \quad = \frac{g\eta}{\rho_0} \xi^* - \frac{g}{\rho_0} \xi^{*2} \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta} \\ \frac{d\xi^*}{dt} = w \end{cases}$$

同样, 令 $\xi^{**} = \xi - \xi_2$, 则有,

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} \eta \xi^{**2} + \frac{g}{\rho_0} \xi^{**} \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\eta} \\ \frac{d\xi^{**}}{dt} = w \end{cases}$$

由非线性常微分方程定性理论^[1,2]易得到 ($w > 0$), 当 $\eta < 0$ 时, $\xi^* = 0$ (即 $\xi = \xi_1$), $w = 0$ 点为稳定的中心焦点; $\xi^{**} = 0$ (即 $\xi = \xi_2$), $w = 0$ 为不稳定的鞍点。当 $\eta > 0$ 时, $\xi^* = 0, w = 0$ 为不稳点的中心焦点; 而 $\xi^{**} = 0, w = 0$ 则为不稳定的鞍点。

由上面的讨论可以看到:

A. 非线性因子 η 的作用可使 $\xi = \xi_1, w = 0$ 的平衡态失稳, 在海洋里直接表现为存在明显的突发性上升流区域。

B. η 的作用可使得上升流运动存在有两个平衡态(稳定点或不稳定点), 即上升流运动过程中存在明显、连续的上升流发展现象, 同时也可以使上升流趋于减弱并消失。

C. 由于 η 的存在, 而不论 β 为正还是为负都有可能出现稳定或不稳定的平衡态, 即在海水密度层化为不稳定分布条件下 ($\beta > 0$), 同样存在稳定的平衡态, 例如 $\xi = \xi_1, w = 0$ 点并无上升流产生; 而当海水密度层化为稳定分布时 ($\beta < 0$), 亦存在不稳定的平衡态, 有明显的上升流运动。这些结论与人们以往的看法(线性条件下)有差别。

V. 非线性作用下的分岔现象

如果在(5)中取 β, η, ζ 均不为零, 但取 $\alpha = 0$ 时, 即初始状态为满足静力平衡状态, 则方程可化为:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\rho_0} [\beta + \eta\xi + \zeta\xi^2]\xi \\ \frac{d\xi}{dt} = w \end{cases} \quad (9)$$

(9)式有三个平衡态, 即, $\xi = 0, w = 0$; $\xi = \xi_2, w = 0$; $\xi = \xi_3, w = 0$ 。其中

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\beta\zeta}}{2\zeta} \\ \xi_3 &= -\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\beta\zeta}}{2\zeta} \end{aligned}$$

类似于 IV 中的讨论可得下表。

由表 1 可见, 上升流的三种平衡态, 在 $\zeta > 0$

表1 稳定性分析列表

Tab. 1 Analysis of stabilities

 $\xi > 0$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	$\eta < -\sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$-\sqrt{4\beta\xi} < \eta < -\sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$\sqrt{4\beta\xi} < \eta < \sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$\eta > \sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$
$\beta > 0$	稳定	鞍点	鞍点	鞍点
$\beta < 0$	鞍点	鞍点	鞍点	鞍点

 $\xi < 0$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	$\eta < -\sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$-\sqrt{4\beta\xi} < \eta < -\sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$\sqrt{4\beta\xi} < \eta < \sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$	$\eta > \sqrt{\frac{9}{2}}\beta\xi$
$\beta > 0$	不稳定	不稳定	不稳定	不稳定
$\beta < 0$	鞍点	鞍点	鞍点	鞍点

注：表中的“不稳定”代表不稳定的中心焦点，而“稳定”则表示稳定的中心焦点。

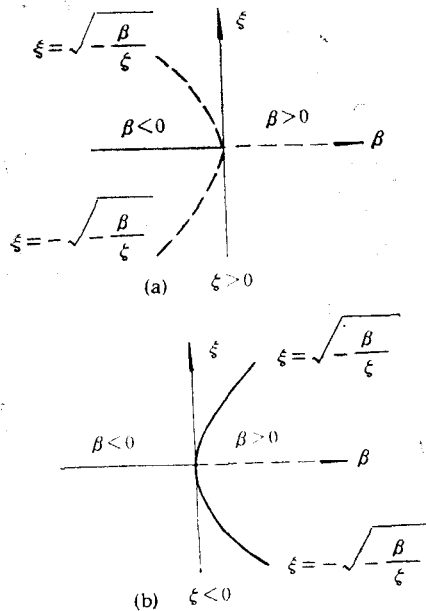
图2 非线性垂直运动 ($\eta = 0$)

Fig. 2 Stabilities of nonlinear vertical motion

---不稳定——稳定

或 $\xi < 0$ 的两种情况下,由于 η 的存在,当 β 的变化由负到正时,在平衡点处可能失稳,发生

平衡态之间的转换,即分岔现象。运动特征如图2,运动将在 $\xi = 0$ 处发生亚临界分岔。

VI. 平衡态的突变

对平衡态的突变现象,国内气象界已进行了不少的研究。若考虑(5)式中 α, β, ξ 均不为零,但 $\eta = 0$,即在海水密度垂直分布的拐点处时,则有:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{\rho}_0} [\alpha + \beta\xi + \xi\xi^3] \\ \frac{d\xi}{dt} = w \end{cases} \quad (10)$$

(10)式月尖型突变的标准形式。这表明,当初始上升流处于一种静力不平衡状态,并且具有海水密度层化的非线性作用时,可导致运动由一种定态跳到另一种定态,即平衡态之间的突变。这一点讨论也可参见文献^[3]。可见密度分布的拐点处易造成上升流平衡态的突变。

VII. 讨论

本文用非线性常微分方程的定性分析理论

对海水中的上升流现象作一简单的分析, 分析表明, 对于海水垂直对流运动不能简单地按照海水层化状态(指线性情况)来认定运动的特征, 考虑了非线性作用以后得到了一些完全不同的结果: 当密度层化为线性状况时, 所得到的结果跟人们通常的观念一致, 而对于密度层化出现二阶非线性, 海水垂直对流运动将会出现平衡态的失稳及分岔现象, 至于密度层化为

三阶非线性作用将导致平衡态之间的跃迁——突变现象(CUSP)。

主要参考文献

- [1] G. 桑森, R. 康蒂, 1983. 非线性微分方程. 科学出版社, 第 557 页。
- [2] 任永泰等, 1984. 常微分方程. 辽宁人民出版社, 第 672 页。
- [3] 李崇银, 1986. 大气大尺度水平运动的稳定性. 大气科学 10:240~249。

THE CHARACTERS OF VERTICAL MOTION IN THE SEA

Lou Ningwei and Xu Xihua

(National Marine Forecasts Center, Beijing)

Received: Feb. 14, 1989

Key Words: Vertical motion, Ascend flow, Bifurcation

Abstract

In this paper, the nonlinear effect of environmental structure of density on the vertical motion is investigated. It is found that in the stable stratification the nonlinear effect may cause the motion unstable, and vice versa.