

波浪作用下有孔粘弹性海底的响应

姜 林

(天津大学水利系)

提要 本文提出了一种有孔粘弹性底面模型。根据Biot的三维固线理论,讨论了波浪作用下有孔粘弹性底面中孔隙水压力响应和固体颗粒承受的有效应力的响应。若忽略粘性,本文的模型则退化到yamamoto的有孔弹性底面模型。从物理意义来说,本文提出的模型更全面合理。

一、引言

研究波浪作用下有孔可渗透海底的响应,对海洋工程具有十分重要的作用。

前人对波浪与有孔可渗透海底的相互作用问题已进行过许多研究工作。Putnam (1949)、Reid (1957) 和Liu (1973) 曾假定有孔海底面是刚性的,孔隙水不可压缩且孔隙水运动满足Darcy定律,得出的孔隙水压力响应与有孔介质的渗透性大小无关。Nakamura (1973)、Moshagen (1975) 和Massel (1976) 曾假定有孔底面刚性不变形,孔隙水可压缩;假定孔隙水运动满足热传导方程,结果便得出了底面的渗透性大小对孔隙水压力响应的影响很大,孔隙水压力随深度向下衰减而且在位相上与底面处的动水压力之间有一定大小的相位差。Yamamoto (1978) 认为刚性底面假设与实际情况不符,提出将海底沉积物固体骨架作为理想弹性有孔介质处理,孔隙水中可能含有气体因而是可压缩的。根据Biot (1941) 的三维固结理论解得波浪作用下有孔弹性底面的响应。结果得孔隙水压力不仅受底面渗透性的影响,而且还受底面弹性和孔隙水可压缩性大小的影响。此后,Mei (1981) 对Yamamoto的解提出一种所谓近似简化解答。

由于海水的作用,粘土质海底沉积物呈典型絮凝结构,胶体性较强,可压缩性也较大。固体颗粒之间的物理和化学作用使得固体骨架不仅呈现一定的弹性,而且常常显示出一定的结构粘性^[1]。因此,单纯将松散海底沉积物固体骨架作为理想弹性体处理显然是不全面的。为了弥补这一缺陷,本文提出一种粘弹性固体骨架模型,在考虑了固体颗粒骨架弹性的同时计及其结构粘性的影响,讨论了波浪作用下有孔粘弹性底面中孔隙水压力响应和固体颗粒承受的有效应力响应。若忽略结构粘性的影响,本文结果退化到Yamamoto的解答。

二、理论分析

本文只研究二维平面波作用下有孔粘弹性底面的响应。设坐标轴X与静止海底面重合,波浪传播方向与X轴正向相反。Z轴始于海底面且向下为正。假设海底沉积物为无限厚。

由于孔隙水静压力和固体颗粒承受的静应力与波浪作用下各自的量值相比数值很小,以下只考虑超过静压力和静应力的动压力及动应力部分。

设孔隙水各向同性且可压缩,则孔隙水的运动连续方程为:^[4,5]

$$\frac{k^*}{\gamma} \nabla^2 p = \frac{n^*}{K'} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t} \quad (1)$$

式中, k^* 是底面的渗系数 (m/s); n^* 是介质的孔隙率; γ 是孔隙水的容重 (N/m^3); K' 是孔隙水的实际压缩模量 (N/m^2); ϵ 是有孔介质的体积应变, p 为孔隙水压力。

若孔隙水中不含气体, 则 K' 等于水的体积压缩模量; 若孔隙水中含有少量气体, K' 将急剧减小, 孔隙水的可压缩性迅速增大, K' 与 K 的关系式如下: [5]

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + \frac{1 - S_r}{P^*} \quad (2)$$

式中, S_r 是有孔介质的含水饱和度, P^* 为绝对孔隙水压力 (绝对压强)。

设海底沉积物的固体骨架为各向同性线性粘弹性固体, 具有Voigt体的力学特性; 即固体的应力分量可以表示成两部分, 第一部分弹性部分正比于应变, 第二部分为粘性部分正比于应变率。即: [2, 3]

$$\sigma_{xx} = \lambda \epsilon + 2\mu \epsilon_{xx} + \lambda' \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial t \cdot \partial x} \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \epsilon + 2\mu \epsilon_{zz} + \lambda' \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\mu' \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial t \cdot \partial z} \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = \mu \epsilon_{xz} + \mu' \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial t} \quad (5)$$

式中, ϵ_{xx} , ϵ_{zz} , ϵ_{xz} 为应变分量, ϵ 为体积应变, 分别表达如下:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

其中, u , w 为质点的水平及垂直位移分量; λ 和 μ 是对应于弹性的拉梅系数 (N/m^2); λ' 和 μ' 是两个粘性系数 ($N \cdot S/m^2$), 分别称为膨胀粘性和剪切粘性, 通常前者比后者小得多, 可以忽略不计 [2]。这样粘弹体中的应力表达式可写成如下形式:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + 2\mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

拉梅系数 λ 和 μ 以及粘性系数 μ' 与拉梅系数 μ 有如下关系:

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\mu' = \tau\mu$$

其中, ν 和 E 分别为泊松比和弹性模量; τ 是粘弹体的松弛时间, 是表征粘弹性物质力学特性的重要参数。

根据Biot [2] 提出的有孔含水介质运动平衡方程和粘弹性体的应力应变关系可得有孔粘弹性介质的运动平衡方程如下:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu' \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \mu' \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (9)$$

$$\mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu' \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \mu' \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (10)$$

在简谐变化的波浪压力作用下, 有孔底面内孔隙水压力和固体质点的位移分量都是简谐变化的, 故设方程(1), (9), (10)有如下形式的解:

$$u(x, z, t) = U(z) e^{i(Kx + \omega t)} \quad (11)$$

$$w(x, z, t) = W(z) e^{i(Kx + \omega t)} \quad (12)$$

$$P(x, z, t) = P(z) e^{i(Kx + \omega t)} \quad (13)$$

其中, k 和 ω 分别为波数和波圆频率; U, W, P 仅为坐标 z 的函数。

将(11), (12), (13)三式代入方程(1), (9), (10), 得三个关于 U, W, P 的二阶齐次线性微分方程:

$$\begin{bmatrix} \omega k & -i\omega D & \frac{k^*}{\gamma} D^2 - \left(\frac{k^2 k^*}{\gamma} + i \frac{\omega n^*}{K'} \right) \\ \alpha D^2 - k^2(\alpha + \beta) & ik\beta D & ik \\ ik\beta D & (\alpha + \beta) D^2 - k^2 \alpha & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中, $\alpha = \mu + i\omega\mu'$, $\beta = \lambda + \mu + i\omega\mu'$, α 及 β 与 λ, μ 有相同的量纲, 微分算符 $D = \frac{d}{dz}$, $D^2 = \frac{d^2}{dz^2}$ 。

方程组(14)的特征方程如下:

$$(D^2 - k^2)^2 (D^2 - r^2) = 0 \quad (15)$$

其中,

$$r^2 = k^2 + i \frac{\omega \gamma}{k^*} \left[\frac{n^*}{k'} + \frac{1}{\alpha + \beta} \right]$$

特征方程共有六个特征根, 分别为: 两个重根 k , 两个重根 $-k$, 两个平常根 $\pm r$ 。这样, 方程组(14)的通解可写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} U \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{kz} \\ e^{-kz} \\ ze^{kz} \\ ze^{-kz} \\ e^{rz} \\ e^{-rz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中, $a_j, b_j, c_j (j=1, 6)$ 均为待定常数。

根据底面为半无限有孔粘弹性空间的假定, 在无限深处 ($z \rightarrow +\infty$) u, w 及 P 都趋于零, 故方程通解形式可简化为:

$$\begin{bmatrix} U \\ W \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \\ c_2 & c_4 & c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-kz} \\ ze^{-kz} \\ e^{-rz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中, 待定系数 $a_j, b_j, c_j (j=2, 4, 6)$ 彼此不独立, 将(17)式代入方程(14)中, b_j, c_j 均可由 a_j 表达出来。故此, U, W, P 可用 a_2, a_4, a_6 表达如下:

$$U = a_2 e^{-kz} + a_4 z e^{-kz} + a_6 e^{-rz} \quad (18)$$

$$W = i \left[a_2 + \frac{a_4}{k} \left(1 + \frac{2m}{1+n} \right) \right] e^{-kz} + i a_4 z e^{-kz} + i a_6 \frac{k}{r} e^{-rz} \quad (19)$$

$$P = i \frac{2\alpha}{1+n} a_4 e^{-kz} + \frac{\omega \gamma}{k k^*} (1+m+n) a_6 e^{-rz} \quad (20)$$

式中, $m = n^* \frac{\alpha}{K'}$, $n = n^* \frac{\beta}{K'}$, m, n 均为无量纲量。系数 a_2, a_4, a_6 可由底面处的边界条件求得。

根据有效应力的概念, 底面处 ($z=0$), 固体颗粒承受的垂向有效应力为零。由于水的粘性很小, 底面处固体颗粒承受的有效剪应力很小, 可忽略不计。底面处的孔隙水压力等于波浪作用在底面上的动水压力。即有:

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + 2\mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (21)$$

$$\tau_{xz} \Big|_{z=0} = \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{z=0} = 0 \quad (22)$$

$$p|_{z=0} = p_0 e^{i(kx + \omega t)} \quad (23)$$

其中, p_0 为波浪作用在底面上交变动水压力的振幅, p_0 可由实验求得或由高阶波理论算得。

由以上三个边界条件求得待定系数 a_2, a_4, a_6 如下:

$$a_2 = \frac{m(k'\alpha - k''\beta)}{2(ms\beta - ikk'\alpha)} p_0 \quad (24)$$

$$a_4 = \frac{(1+n)kk'\alpha}{2(ms\beta - ikk'\alpha^2)} p_0 \quad (25)$$

$$a_6 = \frac{m\beta}{ms\beta - ikk'\alpha^2} p_0 \quad (26)$$

其中, $s = (1+m+n) \frac{\omega \gamma}{k k^*}$, $k' = 1 - \frac{k}{r}$, $k'' = 1 + \frac{k}{r}$ 。

三、结 果 与 比 较

(一) 海底松散沉积物完全饱和情形

如果海底松散沉积物孔隙中处处充满孔隙水且孔隙水中不含气体, 则孔隙水的实际压缩模量 $= K'$ 等于水的体积压缩模量, 即 $K = 1.96 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$ 。而泥沙的抗剪模量 μ 的量级一般在 10^4 (淤泥和粘土) 至 10^8 (固结密实的砂) 之间。假设粘弹性体的松弛时间 τ 与波浪周期 T 有相同大小的量级, 那么对于大多数泥沙, 无量纲刚度比 $m = n^* \frac{\alpha}{K'}$, $n = n^* \frac{\beta}{K'}$ 的值都很小, 可认为 $m = 0$, $n = 0$ 。对此初根情况, 底面的响应如下:

$$u(x, z, t) = -i \frac{p_0}{2\alpha} z e^{-kz} \cdot e^{i(kx + \omega t)} \quad (27)$$

$$w(x, z, t) = \frac{p_0}{2\alpha} \left(\frac{1}{k} e^{-kz} + z e^{-kz} \right) e^{i(kx + \omega t)} \quad (28)$$

$$p(x, z, t) = p_0 e^{-kz} e^{i(kx + \omega t)} \quad (29)$$

式中, $\alpha = \mu \left(1 + i \frac{2\pi\tau}{T} \right)$

由以上解答(29)式可以发现: 在此情况下, 孔隙水压力响应 p 与Yamamoto所得到的完全饱和有孔弹性底面中孔隙水压力响应完全一致。这说明在此情况下固体颗粒之间的结构粘性对孔隙水压力没有影响。但从解答(27, 28)式可以发现, 结构粘性对固体颗粒的位移分量有较大的影响。图1、图2分别给出按Yamamoto公式和本文公式(27, 28)计算所得的固体颗粒位移分布图。由图1、2可看出, 固体的结构粘性使得质点位移减小, 而且结构粘性愈大 $\left(\frac{2\pi\tau}{T} \right)$ 愈大, 则减小量就愈大,

当粘性很小时 $\left(\frac{2\pi\tau}{T} = 0.1 \right)$, 减小量也很小。或不计粘性影响则解答退化到Yamamoto的解。

将 u 、 w 的表达式代入有效应力表达式中, 可得固体颗粒所承受的应力如下:

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{zz} = i\tau x_z = p_0 k z e^{-kz} e^{i(kx + \omega t)} \quad (30)$$

这个结果与Yamamoto所得解完全一致。这说明在完全饱和情况下结构粘性对应力响应没有影响, 粘性的作用显示不出来。图3给出了海底中应力响应分布示意。

(二) 海底松散沉积物非完全饱和情形

对于含水部分饱和的海底沉积物, 由于孔隙中含有气体而使得孔隙水的实际体积压缩模量锐减, 可压缩性猛增。例如, 若孔隙中的水体只占95%, 则在1个大气压下孔隙水的实际压缩模量 $K' = 9.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, 仅为水的体积压缩模量的1%左右。在这种情况下, 固体的剪切模量 μ 与 K' 的量级接近, 刚度比 m 、 n 都有一定大小的量值, 固体颗粒的粘弹性、底面渗透性及孔隙水的可压缩性都将对底面响应产生一定大小的影响。

将求得的待定系数 a_1 、 a_2 的表达式代入(20)式可得孔隙水压力响应表达式如下:

$$p = \left[\left(1 - \frac{ms\beta}{ms\beta - ikk'\alpha^2} \right) e^{-kz} + \frac{ms\beta}{ms\beta - ikk'\alpha^2} e^{-r_1 z} \right] p_0 e^{i(kx + \omega t)} \quad (31)$$

在以下的分析比较中, 取有孔粘弹性体的剪切模量等于孔隙水的实际压缩模量, 即 $\mu = K'$, 泊松比 $\nu = \frac{1}{3}$, 孔隙率 $n^* = 0.35$ 。表征粘弹体刚度、渗透性及波浪要素关系的无量纲参数

$\varphi = \frac{\omega\gamma}{k^2 k^* \mu}$, 表征粘弹体粘性大小的参数 $\tau^* = \frac{2\pi\tau}{T}$ 。图4—9分别给出对应于参数 φ 、 τ^* 不同量值孔隙水压力响应的大小分布和位相差分布。

由图4—6可以看出 φ 和 τ^* 的大小变化对孔隙水压力响应的大小影响较大, 当 φ 较小时, 孔隙水压力沿深度衰减较缓; φ 较大时, 衰减较快。对于较小的 φ 值和 τ^* 值, 孔隙水压力响应大小均小于不计粘性的解答(Yamamoto答); 当 φ 和 τ^* 值较大时, 孔隙水压力值超过Yamamoto的解答。当 φ 值较小时, 孔隙水压力位相差值较小, 当 φ 值较大时, 孔隙水压力位相差值较大且变化快, 底面孔隙传递压力性不好。

以上根据Biot的三维固线理论分析了波浪作用下有孔粘弹性底面的响应问题。从物理意义上说, 本文提出的有孔粘弹性底面模型更全面合理并接近实际。

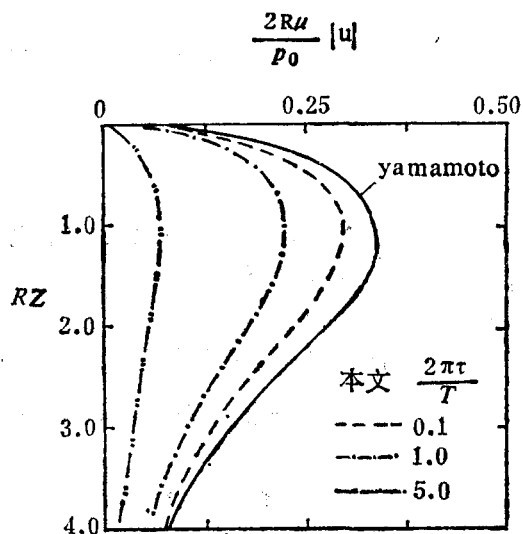


图1 最大水平位移分布

Fig.1 Vertical distribution of the amplitude of the horizontal displacement

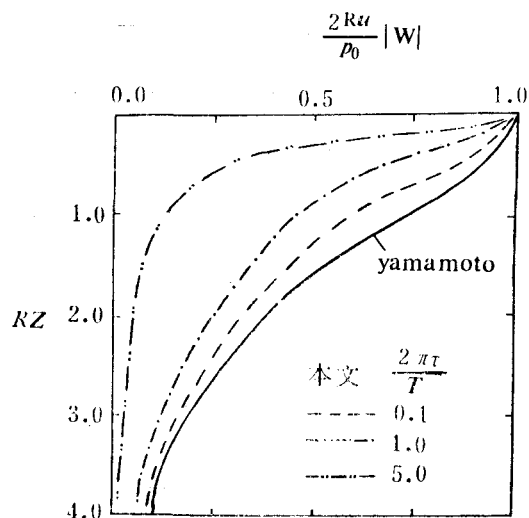


图2 最大垂直位移分布

Fig.2 Vertical distribution of the amplitude of the vertical displacement

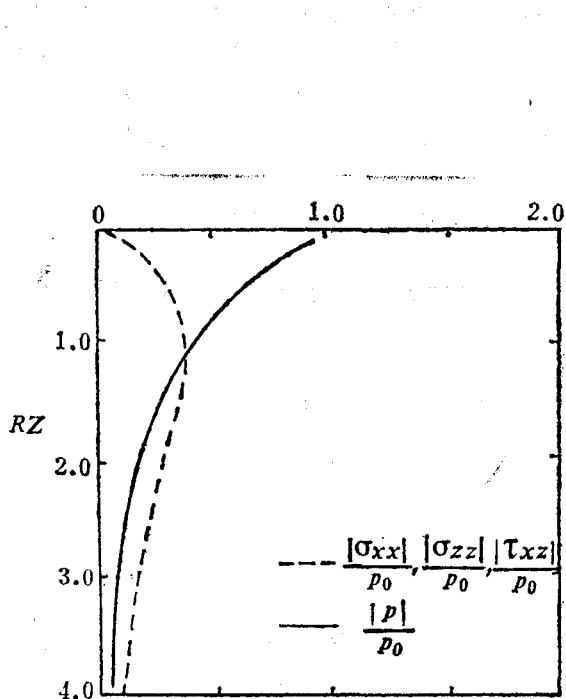


图3 孔隙水压力及有效应力分布

Fig.3 Vertical distribution of the amplitude of effective stresses and pore-water pressure

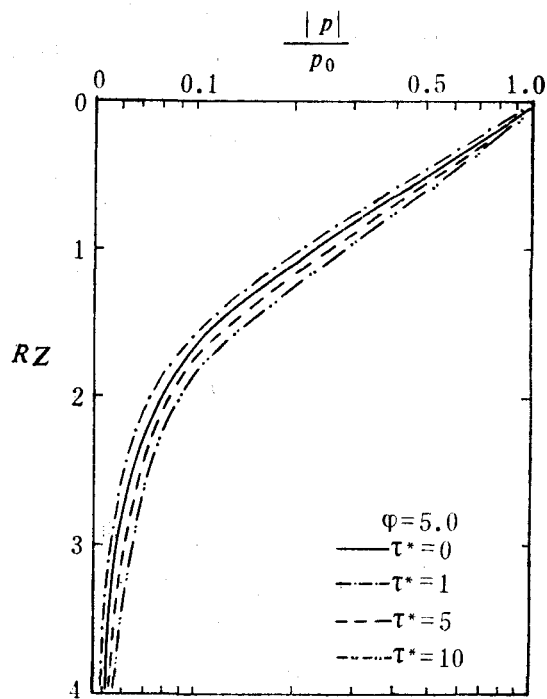


图4 孔隙水压力分布 (\$\varphi=0.2\$)

Fig.4 Vertical distribution of the amplitude of pore-water pressure (\$\varphi=0.2\$)

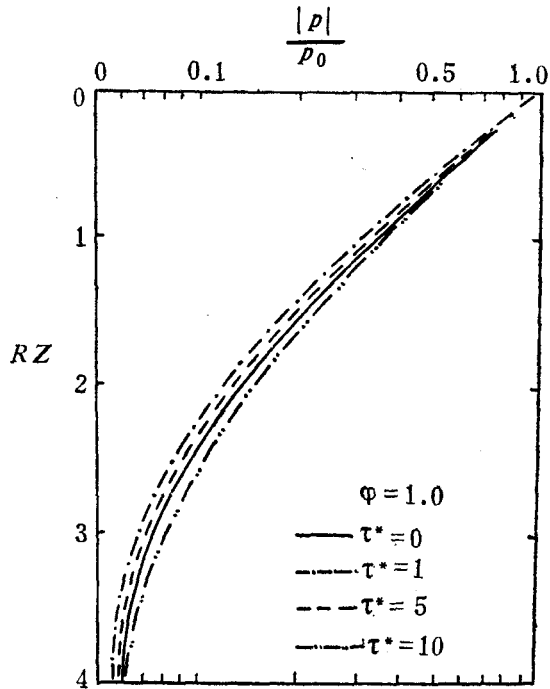


图5 孔隙水压力分布 ($\varphi=1.0$)
Fig.5 Vertical distribution of the amplitude of pore-water pressure ($\varphi=1.0$)

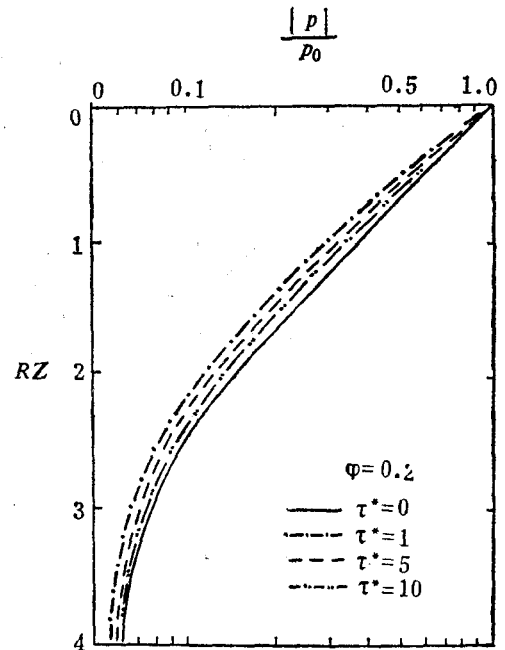


图6 孔隙水压力分布 ($\varphi=5.0$)
Fig.6 Vertical distribution of the amplitude of pore-water pressure ($\varphi=5.0$)

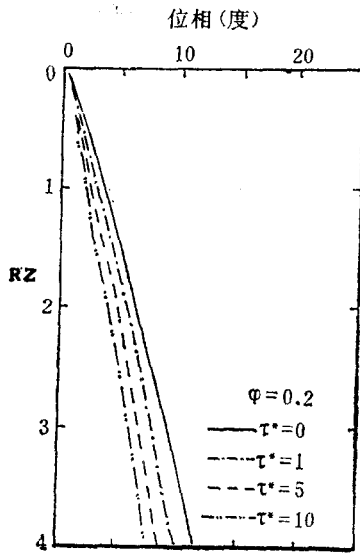


图7 孔隙水相位差分布 ($\varphi=0.2$)
Fig.7 Vertical distribution of the phase lag in the pore-water pressure response ($\varphi=0.2$)

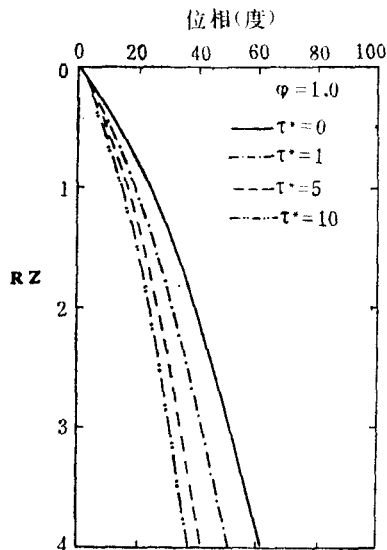


图8 孔隙水相位差分布 ($\varphi=1.0$)
Fig.8 Vertical distribution of the Phase lag in the Pore-water pressure response ($\varphi=1.0$)

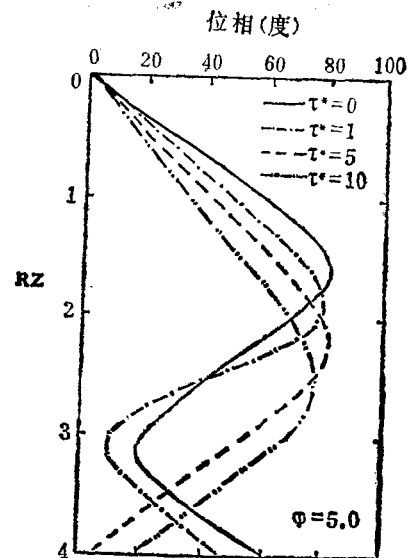


图9 孔隙水相位差分布 ($\varphi=5.0$)
Fig.9 Vertical distribution of the Phase lag in the Pore-water pressure response ($\varphi=5.0$)

主要参考文献

- [1] Carpenter, S. H. , 1973. Viscoelastic properties of marine Sediments. *Proc. Offshore Tech. Conf. (OTC)*1903. PP. 777—788.
- [2] Kolsky, H. , 1953. Stress Waves in Solid. *Clarendon Press*. PP. 95—109.
- [3] Christensen, R. M. , 1982. Theory of Viscoelasticity. *Academic Press* PP. 16—26.
- [4] Biot, M. A. , 1941. General theory of three-dimensional consolidation *J. Appl. Phys.* PP. 12, 155—164.
- [5] Yamamoto, T. et al. , 1978. On the response of a poro-elastic bed to water Waves. *J. Fluid Mech.* PP. 87, 193—206.
- [6] Mei, C. C. , and Foda, M. A. , 1981. Wave-induced response in a fluidfilled poro-elastic soil with a free surface. *Geophysics* PP. 66, 597—631.

**RESPONSES INDUCED BY WAVE IN A PORO-
VISCOELASTIC SEABED**

Jiang Lin

(Department of Hydraulic Engineering, Tianjin University)

Abstract

In this paper, a linear analytic solution for wave-induced responses in a porous seabed is presented for the case where the soil beneath the water is regarded as poro-viscoelastic solid of infinite depth. Exact solutions for the pore-water pressure and the displacements of the porous medium are obtained in a closed form. The theoretical results indicate that the bed response is strongly influenced by the compressibility of pore water, the permeability and shear modulus of the soil, as well as the viscosity of the soil. By neglecting the viscosity of the soil, the present solution approaches one obtained by Yamamoto (1978).