

河口潮流垂向二维有限元数学模型*

李世森 时 钟 刘应中

(上海交通大学港口与海岸工程系 200030)

摘要 σ 坐标变换在河口潮流数学模型中得到了广泛的应用,本文探讨了它在差分离散范畴内的适用性,并认为:在变换后的规则网格上,控制方程增添了若干个非线性项,使得模型更加复杂、计算工作量增加、增大了误差的可能性。为了建立简单、快捷和有效的河口潮流垂向二维数学模型,本文应用变网格有限元方法(不引入 σ 坐标变换,采用任意四边形等参单元)离散横向积分的 Navier-Stokes 方程。

关键词 变网格有限元,垂向二维,河口潮流,数学模型, σ 坐标变换

潮流是潮汐河口地区的主要水动力过程,它的研究在:1)河口动力学;2)港口建设、航道整治和疏浚工程;3)排污入海、河口环境保护、河口地区淡水资源的开发利用等方面都具有重要意义^[1]。因此,对河口潮流场的详细描述是科学家和工程师共同感兴趣的研究课题^[2]。

数学模型为模拟潮流场提供了一种有效的研究手段,其研究主要围绕3个方面展开:1)改进描述物理现象的偏微分方程组;2)提高数值离散方法的相容性、稳定性和收敛性;3)算法的时间复杂性。河口潮流数学模型可分为平面二维(2HD)、垂向二维(2DV)、准三维、二维/三维的耦合嵌套、三维等几种类型。平面二维数学模型^[3-6,16,17]在河口潮流场的模拟中应用较多,发展较为成熟。对于窄深的航道、河口,垂向二维数学模型^[5-8,17-18]较为实用。准三维潮流数学模型^[5,6,9-12]是在二维数学模型的基础上发展起来的,与之有着较紧密的联系。在方程的各种离散方法中,以差分法^[3,5-13]和有限元法^[9-12]最为常见,其他方法有VOF法、有限体积法、谱方法和解析分析法等。总之,河口潮流数学模型已经得到了长足的发展。

然而,建立更加简单、快捷和有效的数学模型仍是必要的。本文的目的:1)比较 σ 坐标变换和变网格有限元方法在河口潮流计算中的应用;2)基于横向积分的 Navier-Stokes(N-S)方程,建立简单、快捷、有效的河口潮流垂向二维数学模型;3)不引入垂向 σ 坐标变换,应用变网格有限元方法(采用等参单元)离散控制方程。

1 σ 坐标变换和变网格有限元方法

垂向 σ 坐标变换在河口潮流垂向二维^[5-8,17-18]和准三维^[9-13]数值模拟中得到了广泛的应用。由于地形是起伏的、非定常流的自由表面随时间变化,因此,可以利用垂向 σ 坐标变换,将不规则计算区域转换为规则区域,再在规则区域上进行方程的数值求解计算。经过 σ 坐标变换之后,方程增加了若干非线性项,增加了方程求解的难度。而在差分离散范畴内,这种处理方法似乎是唯一可行的,否则,原方程将无法通过差分方法数值求解。

有限元方法与差分方法类似,也是一种近似方法,其基本理论为变分和加权剩余法^[14]。相对差分方法而言,有限元方法的优点主要体现在:节点布置较灵活,可以较好地适应各种曲线边界。按照求解域和剖分网格是否变化,它大致可以分为3类:1)传统的有限元方法,在固定计算域和固定计算网格的基础上进行数值求解;2)自适应有限元方法,在固定计算域内,自动进行网格的优化以期达到较精确的模拟结果;3)变网格有限元方法,计算区域不断发生

* 国家自然科学基金资助项目 49806005 号和国家教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金(教技函[1999]2号)资助。

致谢:本文得到了《海洋科学》评审专家的建设性修改意见。

收稿日期:2000-06-08;修回日期:2001-01-12

变化,剖分网格也相应地发生变化。对垂向二维、三维非定常潮流数学模型而言,由于自由表面随时发生变化,因此,数学模型中计算域和计算网格也必须随时改变。

作者在引入有限元方法离散河口潮流垂向二维控制方程时发现:1)之所以采用垂向 σ 坐标变换,完全是为了“适应”差分这一数值离散方法;2)采用有限元方法进行方程的数值离散时,垂向 σ 坐标变换不再是必需的了;3)采用垂向 σ 坐标变换,在变换后的矩形网格上对变换后的控制方程进行有限元离散,与在未变换前的物理网格上直接对原方程进行有限元离散相比,只能带来更多的工作量(方程的变换、实际计算量)、以及增加非线性项后带来的可能的误差。对有限元方法来讲,无论是规则网格还是不规则网格,差别只在于形状函数的不同。与传统有限元方法不同的是,此时计算域是变化的。

2 理论模式

2.1 控制方程

河口潮流垂向二维数学模型的基本方程是将 N-S 方程沿河口宽度方向(y 向)积分而得,坐标系如图 1 所示。假设条件为^[5,6]:1)水质点横向(y 向)流速对时间、空间的偏导数可以忽略不计;2)流动要素(流速)在控制断面上沿横向分布足够均匀;3)两岸侧向摩阻力相等;4)两岸边壁无滑动条件,即 $u = v = w = 0$;5)不计质量力;6)压强服从静水压强分布;7)忽略柯氏力。

$$\text{连续方程: } \frac{\partial Bu}{\partial x} + \frac{\partial Bw}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\text{水位方程: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (B \int_{-h}^{\zeta} u dz) = 0 \quad (2)$$

纵向动量方程:

$$\frac{\partial Bu}{\partial t} + u \frac{\partial Bu}{\partial x} + w \frac{\partial Bu}{\partial z} + \frac{B}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [B \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial z} [B \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z}] \quad (3)$$

$$\text{静水压强近似分布: } p = p_a + \rho g (\zeta - z) \quad (4)$$

其中, t 为时间; ζ 为水位; ϵ_x, ϵ_z 分别为 x, z 方向的紊动粘滞系数; p 为压强; p_a 为大气压强; ρ 为水的密度; g 为重力加速度; u, w 分别为流速在 x, z 两个方向上的分量; B 为河口横断面的概化宽度(图 2); h 为概化水底地形(图 2); $H = \zeta + h$ 为全水深。

2.2 边界条件和初始条件

(a)开边界条件为水位、流速过程。

上游开边界:

$$\zeta = \zeta_1(t), u = u_1(t), w = w_1(t) \quad (5)$$

下游开边界:

$$\zeta = \zeta_2(t), u = u_2(t), w = w_2(t) \quad (6)$$

水位边界条件和流速边界条件最好均给出。

在实际计算中,流速边界条件往往无法给出,由 St. Venant 原理可知,只会影响开边界附近水域的求解精度。

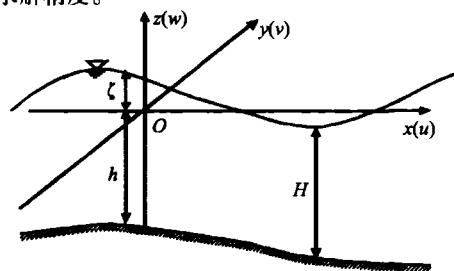


图 1 坐标系

Fig. 1 Co-ordinate system

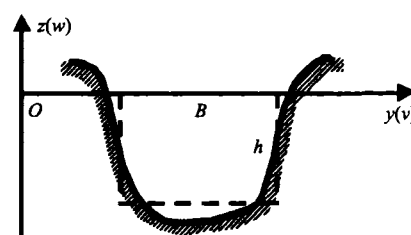


图 2 河口横断面的概化

Fig. 2 Schematic estuarine cross-section

(b)在底部,采用滑移边界条件:

$$\rho \epsilon_z \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=-h} = \tau_b \quad (\tau_b \text{ 为底床切应力}) \quad (7)$$

(c)自由表面处:

$$\rho \epsilon_z \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=\zeta} = \tau_w \quad (\tau_w \text{ 为风应力}) \quad (8)$$

初始条件可定为常数或根据实测资料插值得到: $\zeta|_{t=0} = \zeta_0, u|_{t=0} = u_0, w|_{t=0} = w_0$

初始条件对计算结果的影响,随着模拟时间的增长逐渐减小、消除。

2.3 紊动粘滞系数的确定

紊动粘滞系数的确定是河口潮流数值计算中的关键之一,本文垂直紊动粘滞系数采用 Prantl 混

合长度理论来确定:

$$\epsilon_z = K_1 l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| f(R_1) \quad (9)$$

其中: $R_1 = -\frac{g(\partial \rho / \partial z)}{\rho(\partial u / \partial z)^2}$ 分层理查逊数; $f(R_1) = (1 + \beta R_1)$ 相当于 ϵ_z 的阻尼系数; $\beta = 1.0$; K_1 系数; 混合长度

$$l_m = \begin{cases} K(z - z_0) & (0 \leq z \leq 0.3H) \\ K(0.3H - z_0) & (0.3H \leq z \leq H) \end{cases};$$

K 为 von Karman 常数; $z_0 = K_s/30$, K_s 为粗糙度。水平系动黏滞系数可取常数或按下式确定:

$$\epsilon_x = K_r H u \Delta t \left[1 - \frac{r}{R} \right] \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \left[R \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]^2} \quad (10)$$

其中: $K_r = 5 \sim 10$, 常数; Δt 时间步长; R 为假想主流线平均长度; r 为计算点离最近边壁的距离。

3 有限元离散

3.1 连续方程、动量方程的有限元离散

以下方程的推导, 除非特别指明, 均在一个单元内进行。对于连续方程、动量方程采用任意四边形等参单元离散(图 3)。

任意四边形等参单元的 shape 函数为^[14, 15]: $N_n(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_n \xi)(1 + \eta_n \eta)$, ($n = 1, 2, 3, 4$)。局部坐标与整体坐标的变换关系为:

$$x = \sum x_i N_i, z = \sum z_i N_i$$

其中: (x, z) 为整体坐标系内的坐标; (ξ, η) 为局部坐标系内的坐标; (ξ_n, η_n) , ($n = 1, 2, 3, 4$) 为单元 4 个节点的局部坐标系坐标; (x_i, z_i) , ($i = 1, 2, 3, 4$) 为单元 4 个节点的整体坐标系坐标。

令 $Bu = r$, $Bw = q$, 在单元内近似有: $r = \sum r_i N_i$, $q = \sum q_i N_i$, $p = \sum p_i N_i$, $B = \sum B_i N_i$, r_i, q_i, p_i, B_i 为各变量在节点上的离散值。代入(1)和(3)式中, 会产生一个误差或剩余 ϵ , 令 ϵ 和 shape 函数的内积(Galerkin 加权剩余法)^[15]

$$(\epsilon, N_j) = 0, (j = 1, 2, 3, 4)$$

可得单元有限元方程:

$$AR + A_1 Q = 0 \quad (11)$$

$$CR + DR + EP + FR + GR = 0 \quad (12)$$

其中: $R = \left(\frac{\partial r_1}{\partial t}, \frac{\partial r_2}{\partial t}, \frac{\partial r_3}{\partial t}, \frac{\partial r_4}{\partial t} \right)^T$; $R = (r_1, r_2, r_3, r_4)^T$; $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$; $Q = (q_1, q_2,$

$q_3, q_4)^T$; A, A_1, C, D, E, F, G 均为 4×4 的方阵, 各方阵的系数(可通过 Gauss 数值积分求得)为

$$a_{ij} = \iint \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j |J| d\xi d\eta,$$

$$a_{1ij} = \iint \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j |J| d\xi d\eta,$$

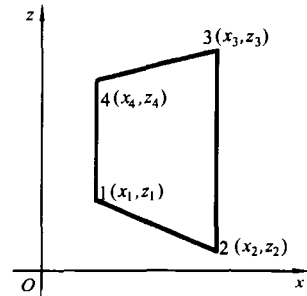
$$c_{ij} = \iint N_i N_j |J| d\xi d\eta,$$

$$d_{ij} = \iint \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j |J| \sum u_k N_k d\xi d\eta,$$

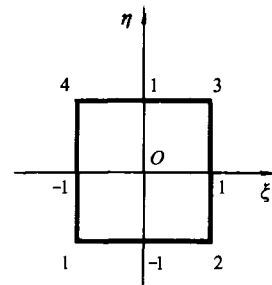
$$e_{ij} = \iint \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j |J| \sum w_k N_k d\xi d\eta,$$

$$f_{ij} = \frac{1}{\rho} \iint \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j |J| \sum B_k N_k d\xi d\eta,$$

$$g_{ij} = \iint \epsilon_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} |J| d\xi d\eta,$$



(a) 整体坐标系中一单元



(b) 局部坐标系中一单元

图 3 四节点等参单元

Fig. 3 Four-node isoparametric element

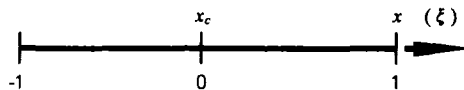


图 4 两节点一维单元

Fig. 4 One-dimensional two-node element

$$h_{ij} = \iint_{\epsilon} \epsilon_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} |J| d\xi d\eta,$$

$$\text{Jacobi 矩阵 } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix};$$

$|J|$ 表示矩阵 J 的行列式。

3.2 水位方程的有限元离散

水位方程(式(2))采用两节点一维有限元法离散, 其形状函数为^[14,15]: $N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$, $\xi = \frac{x - x_c}{l/2}$, l 为单元长度, x_c 为单元的中点坐标(图 4)。

令 $\int_{-l}^l u dz = a$, 在单元内近似有: $B = \sum B_i N_i$, $\zeta = \sum \zeta_i N_i$, $a = \sum a_i N_i$, B_i , ζ_i , a_i 为各变量在节点上的离散值。代入式(2), 同样采用 Galerkin 加权剩余法^[15]:

$$(\epsilon, N_j) = 0, (j = 1, 2)$$

可得单元有限元方程:

$$A_2 \zeta + B_1 \Delta + \frac{C_1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \Delta = 0 \quad (13)$$

其中: $\zeta = [\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}, \frac{\partial \zeta_2}{\partial t}]^T$; $\Delta = (a_1, a_2)^T$;

$$A_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; B_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}。$$

3.3 时间维的差分与计算步长的选取

对于非定常流动, 需对时间维进行差分离散。一般地讲, 差分隐格式是无条件稳定的格式, 允许较大的时间增量。但由于每一步都要求解非线性代数方程组, 计算量大, 因此, 在与有限元方法混合离散时, 一般采用显格式, 是条件稳定的。一般二维情形的有限元方程, 很难通过分析的方法得到稳定性判据, 所以, 实际上往往通过数值实验的方法来确定计算步长。

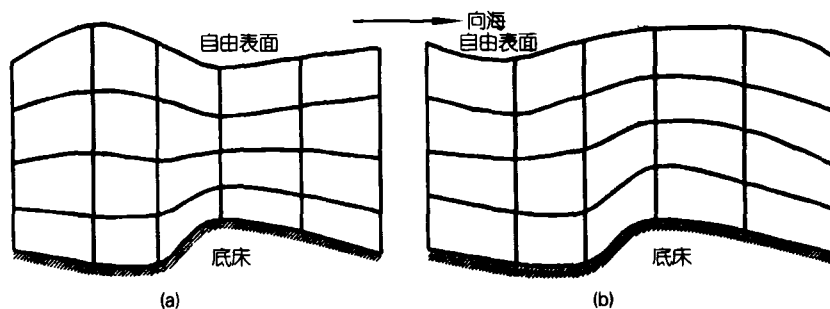


图 5 前后两个时刻的网格

(a) $n\Delta t$ 时刻 (b) $(n+1)\Delta t$ 时刻

Fig. 5 Mesh of two neighboring times

(a) Time $n\Delta t$ (b) Time $(n+1)\Delta t$

3.4 求解过程及网格的更新

将每一个单元的局部有限元方程式(11)、(12)和(13)按照“对号入座”的规则组成总体有限元方程, 加入边界条件(5)、(6)、(7)和(8), 遵循下述计算步骤, 即可进行数值求解。

假设 $n\Delta t$ 时刻的 $\zeta_{n\Delta t}$, $u_{n\Delta t}^a$, $w_{n\Delta t}^a$ (上标 a 表示网格图 5(a)) 均已知, 计算域和网格剖分为图 5(a)。一般说来, 开边界上的水位条件较易给出(流速分布不易或无法给出), 因此最好首先通过有限元方程式(13)及边界条件(7)、(8), 求得 $(n+1)\Delta t$ 时刻的水位 $\zeta_{(n+1)\Delta t}$ 。此时, 计算域和网格剖分应根

据 $\zeta_{(n+1)\Delta t}$ 更新, 如图 5(b)。由于计算域和节点纵坐标均有所变化, 流速分布 $u_{n\Delta t}^b$ (或 $w_{n\Delta t}^b$) (上标 b 表示网格图 5(b)) 需由 $u_{n\Delta t}^a$ (或 $w_{n\Delta t}^a$) 插值求得。当 Δt 较小(水位变动较小时), 可以不作插值, 采用 $u_{n\Delta t}^a$ (或 $w_{n\Delta t}^a$) 近似。通过有限元方程式(12)求得 $(n+1)\Delta t$ 时刻的流速 $u_{(n+1)\Delta t}^b$, 再通过有限元方程式(11)求得 $(n+1)\Delta t$ 时刻的流速 $w_{(n+1)\Delta t}^b$ 。然后进入下一个循环。

在两个网格中, 节点之间的拓扑关系保持不变。在计算过程中, 断面位置保持不变, 即节点的坐标不变, 只需 z 坐标作相应的改变。

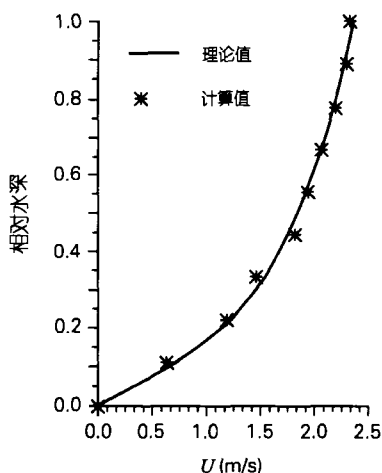


图6 计算结果与理论值的对比

Fig.6 Comparison between calculated and theoretical results

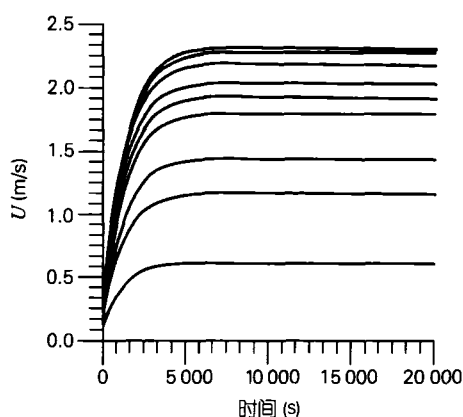


图7 计算过程的收敛性

Fig.7 Calculating convergence

4 算例

应用本文方法对水深 9 m, 坡度 1‰ 的恒定水槽流动进行了计算。图 6 为计算值与对数流速分布理论值的对比, 图 7 为计算收敛情况。从图中可以看出, 计算结果与理论值吻合良好, 同时方法的稳定性、收敛性较好。

5 小结

σ 坐标变换在河口潮流数学模型中得到了广泛的应用, 但是, 在变换后的规则网格上进行离散, 控制方程增添了若干个非线性项, 使得模型更加复杂、

增加计算工作量、增大了误差的可能性。为此, 本文应用变网格有限元方法, 不引入 σ 坐标, 采用任意四边形等参单元, 离散横向积分的 Navier-Stokes 方程, 建立了简单、快捷、有效的河口潮流垂向二维数学模型, 并进行了初步验证。本文模型仍需进一步应用到工程实践当中去。同时可以得到以下几点认识: 1) 之所以引入垂向 σ 坐标变换, 完全是为了“适应”差分这一数值离散方法; 2) 采用有限元方法进行方程的数值离散时, 垂向 σ 坐标变换不再是必须的了; 3) 采用垂向 σ 坐标变换, 在变换后的矩形网格上对变换后的控制方程进行有限元离散, 与在未变换前的网格上对原方程进行有限元离散相比, 只能带来更多的工程量(方程的变换、实际计算量)、以及增加非线性项后带来的可能的误差。

参考文献

- 刘应中、时 钟。河口波流相互作用的数学模型。见: 周哲玮主编。湍流理论新进展及其应用。上海: 上海大学出版社, 2000。209 ~ 215
- 李孟国、曹祖德。海洋学报, 1999, 21(1): 111 ~ 125
- 王尚毅、顾元棧。河口工程泥沙数学模型。北京: 海洋出版社, 1990, 177 ~ 255
- 陆永军、袁美琦。水科学进展, 1998, 9(2): 151 ~ 158
- 曹祖德、王运洪。水动力泥沙数值模拟。天津: 天津大学出版社, 1994, 111 ~ 212
- 黄 胜、卢启苗。河口动力学。北京: 水利电力出版社, 1995。305 ~ 411
- 黄世昌、沈焕庭、潘定安等。长江口南槽流场模拟与最大浑浊带分析。见: 第七届全国海岸工程学术讨论会论文集。北京: 海洋出版社, 1994。1 421 ~ 1 431
- 周济福、刘青权、李家春。中国科学(A 辑), 1999, 29(9): 835 ~ 843
- 白玉川、于天一。海洋学报, 1998, 20(5): 126 ~ 135
- 董文军、李世森、白玉川。海洋学报, 1999, 21(2): 108 ~ 114
- 董文军、陈 虹。海洋与湖沼, 1997, 28(3): 320 ~ 327
- 董文军。天津大学学报, 1999, 32(3): 346 ~ 349
- 邱晨霞、王德燿、许协庆。水利学报, 1997, 7: 7 ~ 12
- 姜礼尚、庞之桓。有限元方法及其理论基础。北京: 人民教育出版社, 1980, 124 ~ 129
- T. J. Chung. 流体动力学的有限元分析。北京: 电力工业出版社, 1980。121 ~ 126
- Barer R. W., Pearson R. V., Roberts A. P. et al.. Numerical simulation of the Humber estuary using a non-orthogonal curvilinear coordinate system. In: C. A. Brebbia, L. Traversoni and L. C. Wrobel (eds.), Computer Modeling of Seas and Coastal Regions II, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1995. 29 ~ 37

研究报告 REPORTS

17 Mead C.T. . *Journal of Hydraulic Research*, 1999, 37
(4): 447~464

18 Sinha P.C. , Rao Y.R. , Dube S.K. *et al.* . *Estuarine,
Coastal and Shelf Science*, 1999, 48: 649~663

2DV FEM NUMERICAL MODEL OF ESTUARINE TIDAL FLOW

LI Shi-sen SHI Zhong LIU Ying-zhong

(*Department of Harbor & Coastal Engineering, Shanghai Jiao Tong University, 200030*)

Received: June, 8, 2000

Key Words: Moving grid FEM, Estuarine tidal flow, σ Co-ordinate transformation, Numerical model, 2DV

Abstract

σ co-ordinate transformation with the finite difference method has been widely applied to the numerical model of estuarine tidal flow. However, after its transformation, several nonlinear terms are added to governing equations on the regular grids. As a result, the model becomes complicated and time consuming with more possible errors. To establish an efficient 2DV numerical model of estuarine tidal flow, the moving grid finite element method has been developed to discrete the width-integrated Navier-Stokes equations instead of σ co-ordinate transformation.

(本文编辑:张培新)