

由静压假定滤掉的可能波动的唯一性*

杨联贵 谢 强 侯一筠 程明华

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

提要 对未作静压假定的线性长波方程进行讨论, 论证了由静压假定所滤掉的波动只有一种可能的结论。

关键词 静压假定, 可能波动, 唯一性

在线性理论范围内, 对均匀理想流体的波动进行研究时, 一般采用一些假定, 如: 对于短重力波, 假定流体是无旋的; 对科氏力作用下的长波, 假定压强服从静压分布。然而, 众所周知, 一个假定往往可能导致问题的简化, 同时也可能引起一种“滤波”作用。例如: 假设科氏参量为常量时, 就必然会把 Rossby 波滤掉。对于静压假定, 除了给求解 Sverdrup 波等波动时带来方便外, 同样可能滤掉一些波动。余宙文^[1]已找到了一类由静压假定滤掉的可能波动。本文从不可压缩均匀流体的线性方程组出发, 在等深水域中, 论证了由静压假定滤掉的可能波动只此一种。

1 基本方程

不可压缩的旋转理想流体线性化的运动方程和连续方程为^[1]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + f \vec{k} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot P + \vec{k} g = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

其中坐标原点位于未扰动的水面上, z 轴取向向上为正, 以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示相应的坐标向量, f 为科氏参量, g 为重力加速度。

$$\text{令 } \vec{V} = \vec{V}_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$P = -\rho g z + P_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (4)$$

将(3), (4)代入(1), (2)后, 可求得当 $\omega \neq f$ 时扰动压强 $P_0(x, y, z)$ 所满足的方程

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2} \right) + (\omega^2 - f^2) \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

而 $\vec{V}_0(x, y, z)$ 可由(5)所得的 P_0 表示, 写成分量

$$U_0 = \frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} \left[f \frac{\partial P}{\partial y} - i\omega \frac{\partial P}{\partial x} \right] \quad (6)$$

$$V_0 = \frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} \left[-f \frac{\partial P}{\partial x} - i\omega \frac{\partial P}{\partial y} \right] \quad (7)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (8)$$

求解(5), 除满足有界性条件, 还有边界条件。在刚壁上, 法向速度为零。若以 (n_x, n_y, n_z) 表示刚壁

* 国家自然科学基金资助项目 49476276 号。
收稿日期: 1996 年 6 月 20 日

处的单位法向量, 则此条件为

$$i\omega n_x \left[f \frac{\partial P}{\partial y} - i\omega \frac{\partial P}{\partial x} \right] + i\omega n_y \left[-f \frac{\partial P}{\partial x} - i\omega \frac{\partial P}{\partial y} \right] + n_z (\omega^2 - z^2) \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

在自由面 $\zeta(x, y, t) = \zeta_0(x, y)e^{-i\omega t}$ 上满足

$$\begin{aligned} \omega_0|_{z=\zeta} &\approx -i\omega\zeta_0(x, y) \\ \rho_0|_{z=\zeta} &\approx -\rho g\zeta_0(x, y) \end{aligned}$$

由上式消去 $\zeta_0(x, y)$, 应用(8)并略去高阶小量得

$$\left(g \frac{\partial P_0}{\partial z} - \omega^2 P_0 \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

这样, 当 $\omega \neq f$ 时, 可由(5), (9), (10)求得 P_0 , 进而求得 $\vec{V}_0 = (U_0, V_0, W_0)$ 。而波面振幅可由下式给出

$$\zeta_0(x, y) = \frac{1}{\rho g} \rho_0(x, y, 0) \quad (11)$$

上面的推导既未作无旋假定, 也未作静压假定, 且适合于任意底地形。对于等深流体, 余宙文等不仅求得了已知波动(短重力波, Sverdrup 波等)的统一解^[1], 而且求得了一类由静压假定所滤掉的可能波动^[2]。

2 基本方程可能的波动解

设等深水域的深度为 d , 选取 x 轴方向使其不与波动传播方向垂直, x 方向的波数为 k , 则 P_0 具有如下形式

$$P_0(x, y, z) = Y(y)Z(z)e^{ikx} \quad (12)$$

代入(5)得

$$-\omega^2 \frac{Y''}{Y} = (\omega^2 - f^2) \frac{Z''}{Z} - \omega^2 k^2 = \text{常数} \quad (13)$$

余宙文^[1, 2]已讨论过: ①常数取 $\omega^2 l^2$ 且 $\omega > f$; ②常数取 $\omega^2 f^2$ 且 $\omega < f$; ③常数取 $-\omega^2 l^2$ 且 $\frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}(k^2 - l^2) > 0$ 几种情况, 现考虑第 4 种情况常数取 $-\omega^2 l^2$ 且 $\frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}(k^2 - l^2) < 0$ 的情况。

$$\text{由(13)有 } Y'' - l^2 Y = 0 \quad (14)$$

$$Z'' + \frac{\omega^2}{f^2 - \omega^2}(k^2 - l^2)Z = 0 \quad (15)$$

注意到水深为常数 d 时(9)变为

$$\frac{dZ}{dz} \Big|_{z=-d} = 0 \quad (16)$$

由(14), (15), 结合边条件(10), (16)有

$$P_0(x, y, z) = Y(y)Z(z)e^{ikx} = (C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly}) \cos \alpha(z + d) e^{ikx} \quad (17)$$

频散关系为

$$\omega^2 = -g \alpha \tan \alpha d$$

$$\text{其中 } \alpha^2 = \frac{\omega^2}{f^2 - \omega^2}(k^2 - l^2)Z > 0 \quad (18)$$

将(17)代入(4), (6), (7), (8), (11)且考虑到(3)和 $\zeta = \zeta_0(x, y)e^{-i\omega t}$ 得

$$\zeta = \frac{\cos \alpha d}{\rho g} [C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly}] e^{i(kx - \alpha t)} \quad (19)$$

$$U = \frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} [f(C_1 l e^{ly} - C_2 l e^{-ly}) + \omega k(C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly})] \cos \alpha(z + d) e^{i(kx - \alpha t)} \quad (20)$$

$$V = \frac{1}{\rho(\omega^2 - f^2)} [-ifk(C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly}) + i\omega(C_1 l e^{ly} - C_2 l e^{-ly})] \cos \alpha(z + d) e^{i(kx - \alpha t)} \quad (21)$$

$$W = -\frac{\alpha}{i\rho\omega} (C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly}) \sin \alpha(z + d) e^{i(kx - \alpha t)} \quad (22)$$

$$P = -\rho g z + (C_1 e^{ly} + C_2 e^{-ly}) \cos \alpha(z + d) e^{i(kx - \alpha t)} \quad (23)$$

上述解因含有因子 e^{ly} , e^{-ly} , 由界性条件, 波动只能在半平面内出现。不妨设波动存在于 $y > y_0$ 的上半平面, 则 $C_1 = 0$, $V|_{y=y_0} = 0$, 于是有 $\omega l = fk$, 代入(18)得 $\alpha^2 = -k^2 < 0$ 出现矛盾。所以第 4 种情况, 基本方程无波解存在。说明由静压假设所滤掉的可能波动只有情形②。

3 结语

本文严格论证了由静压假定所滤掉的可能波动只有一种, 这样, 就可以只对此类波动进行观察研究, 为观察资料的分析提出了理论基础。

参考文献

- [1] 余宙文、甘子钧等, 1985。海洋学报 1: 1~11。
- [2] 余宙文、甘子钧等, 1986。海洋学报 4: 393~398。

THE UNIQUENESS OF POSSIBLE WAVE FILTERED BY THE STATIC PRESSURE HYPOTHESES

Yang Liangui, Xie Qiang, Hou Yijun and Cheng Minghua
(Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao, 266071)

Received: Jun. 20, 1996

Key Words: Static pressure hypotheses, Possible waves, Uniqueness

Abstract

On the condition of no static pressure hypotheses, we have discussed the linear long wave equations, and proved that there is only a kind of possible waves caused by static pressure hypotheses.