

反演大气动力系统与中小尺度天气预报

RETRIEVING SYNOPTIC DYNAMIC SYSTEM AND FORECASTING MESO-MICRO SCALE WEATHER

张 韧

(空军气象学院 南京 211101)

天气预报目前对于不同类型的具体天气系统, 还难以较好地给出表现其特定运动规律的流体力学和热力学方程的具体形式; 对中小尺度天气系统由于缺少相应分辨率的观测资料这一目前尚难以克服的困难, 其数值预报结果还很不理想, 难以投入实际业务工作之中。解决和处理好上述困难对于改进和提高天气分析和预报水平无疑提供了新的途径。近年来的一些理论研究和应用实践对这个问题进行了积极的探索, 得到了一些有益的思路和启示。

1 利用观测资料反演天气系统的动力模型

在许多实际业务工作和具体天气预报中, 常常不知道描述这些系统的确切的数学模型, 因而难以建立针对具体对象的动力或数值预报模式。最近, 一些研究^[1]提出了解决这个问题的新思路: 将某一具体天气系统发展演变过程中积累下的多年观测资料作为该天气系统动力模式的一系列特解(即在其相空间中留下的运动轨迹), 这样, 尽管不知道描述该系统的动力模型, 但如果把这些观测资料看成是该动力模型的一系列离散值, 去解出与数值求解相反的问题, 即可反演出较为理想的表现该具体天气系统的非线性动力模型。基于所反演出的动力模型, 即可较有针对性地建立起对应天气系统的数值预报或诊断预报的模式。

1.1 基本的反演方法^[1]

设系统的状态 q_i 随时间演变的物理规律可表示为:

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n), i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

函数 f_i 为 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的一般非线性函数。一般情况下, 不知道 $f_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 的具体形式, 但知道(1)式的

一系列特解, 即 $q_i^{(j\Delta t)} (j = 1, 2, \dots, m)$, m 为资料序列的长度, 可将(1)式写成差分形式:

$$q_i^{(Z+1)\Delta t} - q_i^{(Z-1)\Delta t} / 2\Delta t = f_i(q_1^{j\Delta t}, q_2^{j\Delta t}, \dots, q_n^{j\Delta t}), j = 2, 3, \dots, m-1, (2)$$

进一步根据系统的物理性质, 将 f_i 设为某种非线性函数, 并用反演方法确定其具体形式和各参数值。设 $f_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 中有 G_k 项和相应的 P_k 个参数, $k = 1,$

$2, \dots, K$, 即 $f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{k=1}^K G_k P_k$, 且设观测资料能够组成 $M (M = m-2)$ 个方程, 写成向量和矩阵形式为:

$$D = GP \quad (3)$$

其中:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_i^{3\Delta t} - q_i^{\Delta t}) / 2\Delta t \\ (q_i^{4\Delta t} - q_i^{2\Delta t}) / 2\Delta t \\ \vdots \\ \vdots \\ (q_i^{m\Delta t} - q_i^{(m-2)\Delta t}) / 2\Delta t \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} G_{11} G_{12} \dots G_{1K} \\ G_{21} G_{22} \dots G_{2K} \\ \vdots \\ \vdots \\ G_{M1} G_{M2} \dots G_{MK} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_K \end{bmatrix}$$

G 为 $M \times K$ 阶矩阵, 它是由非线性多项式变量用观测资料求得的。(3)式中除向量 P 以外, 其余都是已知的。给定一个向量 D , 要求一个向量 P , 使其满足(3)式。

收稿日期: 1995 年 6 月 20 日

用最小二乘法估计及一系列运算处理,最后可以得到:

$$P = HD \quad (4)$$

其中 $H = U_L A_L^{-1} V_L^T$ (T 表示转置矩阵, -1 表示逆矩阵),

$$U_L = \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & \dots & U_{1L} \\ \vdots & & & \vdots \\ U_{K1} & \dots & \dots & U_{KL} \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$A_L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$V_L = \begin{bmatrix} V_{11} & \dots & \dots & V_{1L} \\ \vdots & & & \vdots \\ V_{M1} & \dots & \dots & V_{ML} \end{bmatrix}$$

$V_i = \frac{1}{\lambda_i} G U_i = (V_{1i}, V_{2i}, \dots, V_{Mi})^T$, $U_i = (U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{Ki})^T$, $i = 1, 2, \dots, L$, U_i 是相应于 λ_i 的特征向量, λ_i 是 $G^T G$ 的 K 阶实对称矩阵的特征值。

上述推导可以从实际观测资料中求出其对应天气系统动力模式的具体形式和控制参数 G 和 P , 此后则可进一步分析 f_i 中各项(Gk, Pk)对具体天气系统演变

的相对贡献大小, 去除对系统演变没有作用或是作用很小的无关项, 得到所要反演的模式方程组。利用反演所得的动力模式可以较好地表现它所对应的天气系统, 从而可以较为有目的地准确预报该天气系统的运动发展和演变。

1.2 Lorenz 系统的反演

利用上述方法可以从观测资料中较为准确地反演出 Lorenz 非线性动力模型^[1]。

Lorenz 系统的动力模式方程组可以写成下列形式:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma Y - \sigma X \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ \quad (2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ \quad (3)$$

其中 $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \delta/3$ 。

用 Longkuta 方法对(1)~(3)式进行数值积分得到变量 X, Y, Z 的一组时间序列。这里时间序列取 2 000 步到 3 000 步的积分结果, 积分初始值为(0, 1, 0), 时间步长为 0.005。将要反演的系统设为:

$$\frac{dX}{dt} = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 X^2 + a_5 Y^2 + a_6 Z^2 + a_7 XY + a_8 XZ + a_9 YZ \quad (4)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4 X^2 + b_5 Y^2 + b_6 Z^2 + b_7 XY + b_8 XZ + b_9 YZ \quad (5)$$

$$\frac{dZ}{dt} = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 X^2 + c_5 Y^2 + c_6 Z^2 + c_7 XY + c_8 XZ + c_9 YZ \quad (6)$$

显然, 方程组中包含了原 Lorenz 系统, 但也包含了一些无关的项。现在的问题是要利用 X, Y, Z 的“观测”资料序列, 确定方程组中各项的参数值, 并去除那些无关项。文献[1]中表 1 给出了方程中各系数值的反演结果, 其中不难看出原系统中各项的系数与实际值相当接近, 而无关项的系数比原系统中各项的系数要小 3 个量级以上, 接近于零, 两者差异十分显著。为了定量比较方程各项对系统演变的相对贡献大小, [1]计算了各项的相对方差贡献, 计算公式为:

$$R_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [T^2 i / (\sum_{i=1}^a T^2 i)] \quad (7)$$

其中 $m = 1\ 000$ 为资料序列长度, $T_i = a_1 X, a_2 Y, \dots, a_9 YZ$ 为方程中的各项。文献[1]中表 2 给出了 3 个方程中各项的 R_i 值, 可以看出, 原系统各项的方差贡献占有相当大的比重, 而无关项的方差贡献几乎为零, 各

项之和仅在 1% 以下。因此, 由表 1 和表 2 不难去除与原系统无关的项, 得到所要反演的方程组为:

$$\frac{dX}{dt} = a_1 X + a_2 Y \quad (8)$$

$$\frac{dY}{dt} = b_1 X + b_2 Y + b_8 XZ \quad (9)$$

$$\frac{dZ}{dt} = c_3 Z + c_7 XY \quad (10)$$

与(4)~(6)式相比, 反演得到的方程组与原 Lorenz 系统(1)~(3)式完全一致。为了进一步提高反演精度, 可用原资料序列对(8)~(10)式重新进行一次反演, 得到的系数反演值文献[1]表 3 所示, 与文献[1]表 1 相比, 表 3 给出的系数值与实际值更为接近。上述反演结果说明, 对于象 Lorenz 系统这样复杂的非线性混沌动力模型, 也可用“观测”资料很精确地反演出来。尽管这里

的“观测”资料是用积分值代替的,但如果观测资料的精度足够高,两者是等价的。

利用实际观测资料反演天气系统的动力模式这种方法为非线性动力学研究和实际天气预报提供了新的思路和途径,特别是在无法确认具体预报对象的动力特性和运动性态情况下,运用这种方法构造动力系统和确定预报模式是较为有效的,具有广阔的应用前景。

2 用大尺度场变量预报中小尺度天气

由于细网格观测资料的缺乏,中小尺度天气预报难以得到实质性的提高。因此,能否用大尺度场去预报中小尺度过程的发生发展,这个问题更具有实际意义。不少的中尺度数值模拟表明^[2,7],中尺度系统发生发展的模拟对中尺度初值并不敏感;用天气尺度分辨率的初始场可以报出许多中尺度特征,其解更多地由局地强迫决定,也就是大气很快会“忘记”初始状态而向局地强迫调整。在业务预报中采用的 MOS 预报和落区预报^[3]等技术就是利用数值预报得到的大尺度场和实际大尺度资料通过一定的统计关系或指标来预报中尺度系统并取得了一定的成功。这些结果表明,至少有一部份中尺度系统的发生发展并不依赖于初始存在的中尺度特征,而是大尺度场,下垫面局地强迫和对流潜热强迫所决定的。根据强迫耗散非线性动力系统理论,至少有些类型的中小尺度对流天气系统可以是以大尺度场为控制变量的中小尺度动力系统的吸引子(吸引子是系统运动状态和行为的归宿和终态),它们的发生是大尺度场演变到一定的临界点,使原来的状态失稳而迅速进入到吸引子的过程^[4]。这样,预报它们的发生就成了对吸引子的计算而不严格依赖中小尺度的初始状态。因此,应用大尺度系统的动力参数去分析和预报中小尺度天气的发生发展和演变是可行的。

上述思想方法和理论基础^[4]是将一般的大气运动方程写成算子形式:

$$B \frac{d\varphi}{dt} + (N + L)\varphi = \xi \quad (1)$$

其中 φ 是大气状态矢量, B 是正定算子, N 是反伴算子, L 是自伴算子, ξ 是外源强迫。实际大气过程中包括各种时间尺度和空间尺度过程,但不同尺度过程既相对独立,又相互制约,这种相互关系可以用控制方程表示出来。

设 $e_1, e_2, \dots$ 是定义在区域 R 上的正交完备函数基底, φ 可以展成级数:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i e_i \quad (2)$$

如果选择的基底函数具有尺度可以分离特征,不妨设随着 i 的增大, e_i 的空间尺度减小,那么根据经验或所研究问题的物理特征,可以确定一个临界值 i_m ,使得

$$\varphi_L = \sum_{i_L < i_m} \varphi_{iL} e_{iL} \quad (3)$$

表示大尺度场,而用

$$\varphi_s = \sum_{i_s > i_m} \varphi_{is} e_{is} \quad (4)$$

表示中小尺度场。利用 *Kalcrkin* 近似,可以建立起谱预报方程:

$$B \frac{d\varphi_{is}}{dt} = N_{is} + \xi_{is}, i_s > i_m \quad (5)$$

$$B \frac{d\varphi_{iL}}{dt} = N_{iL} + \xi_{iL}, i_L \leq i_m \quad (6)$$

$$\text{其中, } N_{is} = -\epsilon \int (N + L) \varphi_{iL} dR, \xi_{is} = \epsilon \int \xi e_i dR \\ \int e_i e_j dR = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/\epsilon & i = j \end{cases}$$

显然(5)式表示中小尺度谱方程,它包含胞线,对流降水,强雷暴等系统,这些系统生成和消亡的时间很短,而维持时间却相对较长^[5]。

(6)式表示大尺度的谱方程,其发展演变过程一般来说较中小尺度系统要缓慢得多。这样,中小尺度动力系统(5)式可以作为一个以大尺度场为控制变量的独立系统。此外(5)式还是一个耗散系统,它对应有有限个吸引子^[6](每个吸引子对应一种确定的运动终态),整个相空间为这些吸引子的吸引场所分割,任何不在吸引子上的状态在相空间中的演变就有两个时间尺度;一个是向吸引子趋近的时间尺度,另一个是随吸引子演变的时间尺度。前者对应于中小尺度系统的发生发展过程,后者对应于系统生成后的维持过程,从预报角度看,主要应获得刻画吸引子演变的过程方程。

由于大尺度场演变时间 t_L 和中小尺度场演变时间 t_s 相比要大得多,即

$$\epsilon = t_s/t_L \quad (7)$$

是一个小参数,即时间可分。同时为简便起见,(5)式和(6)式可以写成:

$$\frac{d\varphi_s}{dt_s} = F_s(\varphi_s, \varphi_L) \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi_L}{dt_L} = F_L(\varphi_s, \varphi_L) \quad (9)$$

引进慢时间 $t' = t_L$, 则 $t_s = t'/\epsilon$ 代入(8),(9)两式,得:

$$\epsilon \frac{d\varphi_s}{dt'} = F_s(\varphi_s, \varphi_L) \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi_L}{dt'} = F_L(\varphi_s, \varphi_L) \quad (11)$$

由于 ϵ 是小量,上式可以近似成:

$$F_s(\varphi_s, \varphi_L) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi_L}{dt'} = F_L(\varphi_s, \varphi_L) \quad (13)$$

按前面的分析, 这样的近似具有很清楚的物理实质; 即假设从初始状态到吸引子状态的过程非常短暂, 可以看成是瞬时的跳跃。在此过程中, 中尺度状态迅速地从过渡状态跳跃到吸引子状态, 而大尺度场认为未变。这个过程可以称为广义适应过程。

从方程(12), (13)式可以看到, 中尺度控制方程中不再包括时间微商项, 它的解不依赖于中尺度初值, 中尺度吸引子随着大尺度场的演变而改变, 这正是业务预报中根据大尺度场结合一定的统计关系, 可以预报中尺度对流系统的根本原因所在。这方面的实际运用和具体计算可参有关文献^[4]。这种方法的实践为实际

的中小尺度天气预报提供了一种切实可行的途径。

参考文献

- [1] 黄建平、衣育红, 1991。中国科学(B) 3: 331~336。
- [2] 周晓平、赵思雄, 1984。大气科学 8: 1~6。
- [3] 陶诗言, 1977。大气科学 1: 64~72。
- [4] 李志锦、丑纪范, 1993。中国科学(B) 10: 1114~1119。
- [5] 叶笃正、李麦村, 1980。第二届全国数值天气预报会议论文集。科学出版社, 181~192。
- [6] 郝柏林, 1983。物理学进展 3: 329~391。
- [7] Warner, T. T. *et al.*, 1989. *Mon. Wea. Rev.* 117: 1281~1310。