第10卷第3期 海 洋 科 学 Vol. 10, №3
1986年5月 MARINE SCIENCES May, 1986

用PC-1500型袖珍式计算机计算国际地磁参考场的方法和程序设计

雷受旻
（地质矿产部海洋地质研究所）
王述功 高 仰
（国家海洋局第一海洋研究所）

国际地磁参考场和卫星重力异常一样，都是用实型球谐函数表示位场的空间变化。所不同的是地磁参考场本身随时间变化，除了一个基本场模式之外，还需要一个年变模式，因此，在进行正常场改正时必须考虑测量工作的年份，甚至月份。所以特别需要借助比较普及的计算工具及时提供计算结果。本文介绍利用PC-1500计算机计算地磁参考场的实用方法和程序设计。如果不是内存空间的限制，本文所介绍的方法完全适用于高阶次的卫星重力异常计算。

一、国际地磁参考场的基本计算公式

1．磁位

$$U=a\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\Upsilon}\right)^{n+1}(g_{n,m}\cos m\lambda+h_{n,m}\sin m\lambda)p_{n,m}(\cos\theta) \quad (1)$$

地磁场的三个分量：

$$X=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\Upsilon}\right)^{n+2}(g_{n,m}\cos m\lambda+h_{n,m}\sin m\lambda)\frac{dp_{n,m}(\cos\theta)}{d\theta} \quad (2)$$

$$Y=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\Upsilon}\right)^{n+2}(g_{n,m}\sin m\lambda-h_{n,m}\cos m\lambda)p_{n,m}(\cos\theta) \quad (3)$$

$$Z=\sum_{n=1}^{N}-(n+1)\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\Upsilon}\right)^{n+2}(g_{n,m}\cos m\lambda+h_{n,m}\sin m\lambda)p_{n,m}(\cos\theta) \quad (4)$$

2．总强度

$$T=[X^2+Y^2+Z^2]^{1/2} \quad (5)$$

上述公式采用地心坐标系，坐标原点位于地球椭球体的几何中心。地磁场的场强$\vec{T}$被分解为三个正交分量：沿测点p到地心o的向径$\vec{po}$方向的分量为Z；在p点所在的子午面内，与Z垂直的分量（向北为正）为X；与X，Z垂直的分量（向东为正）为Y。

公式（1）—（4）中，a为地球椭球面的平均地心距；Υ为测点p的地心距 $\Upsilon=|op|$；λ为测点p的经度；θ为测点p的地心余纬度$\theta=\frac{\pi}{2}$，ψ是p点的地心纬度，即op与赤道平面的夹角，在北半球$\psi>0$。测点的地心纬度ψ与地理纬度φ有下述关系：

$$A^2tg^2\psi=B^2tg^2\varphi \quad (6)$$

式中，A和B分别为地球椭球体的赤道半径和极半径。$f=\frac{A-B}{A}$则为地球椭球体的扁率。

n，m为球谐函数的阶次，N为最高阶次。

$p_{n,m}(\cos\theta)$是施米特标准化正交勒让德伴随函数。其定义式为：

$$p_{n,m}(u)=\frac{1}{2^n n!}\left[\frac{\delta_m(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2}(1-u^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{du^{n+m}}(u^2-1)^n \quad (7)$$

式中$u=\cos\theta$。

$g_{n,m}$和$h_{n,m}$为相应的标准化球谐系数。

二、实　用　参　数

与国际地磁参考场对应的地球椭球体之形态参数为：

$A=6378160$米，$B=6356775$米，

$$f=\frac{1}{298.25},\quad a=6371200\text{米}。$$

对于基本场模式$N=10$，年变模式$N=8$。

$g_{n,m}$，$h_{n,m}$应根据测量日期，按下述方法确定。

1．在1965—1975年间，根据DGRF1965，DGRF1970和DGRF1975系数表内插计取。如：测量日期为1973年7月1日（以“年”为单位则为1973.5），由DGRF1970中查得$g_{n,m}^{1970}$，由DGRF1975中查得$g_{n,m}^{1975}$，则：$g_{n,m}=g_{n,m}^{1970}+(g_{n,m}^{1975}-g_{n,m}^{1970})\times(1973.5-1970)$。$h_{n,m}$插值方法同此。

2．在1975年—1980年间，则根据DGRF1975和IGRF1980之系数内插。

3．1980年以后则按IGRF1980基本模式$g_{n,m}$，$h_{n,m}$和年变模式$g_{n,m}^{1980}$，h_{n}^{1980}推算。如1983年7月1日：$g_{n,m}=g_{n,m}^{1980}+g_{n,m}^{1980}(1983.5-1980)$。

上述处理方法是由IAGA（国际地磁与超高层大气物理协会）的一个工作小组提议，于1981年8月15日爱丁堡第四届科学讨论会上由IAGA正式采纳的。DGRF、IGRF系数见参考文献〔3〕。

三、计　算　方　法

1．海洋磁力仪是在前述地球椭球面附近进行测量，因此可以按地球椭球体之地心距计算式中之$\frac{a}{\gamma}$。

$$\frac{a}{\gamma}\simeq0.998907(1+0.00673957\sin^2\psi)^{1/2}\tag{8}$$

2．采用“标准化”公式乃是由于其中高阶项与低阶项系数之数量级比较接近。但从计算角度来考虑，还是“非标准化”的公式更节省计算时间。

$$P_n^m(u)=\frac{1}{2^n n!}(1-u^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{du^{n+m}}(u^2-1)^n\tag{9}$$

为缔合勒让德伴随函数。与定义式（7）对比可得：

$$P_{n,m}(u)=Q_n^m P_n^m(u)\tag{10}$$

其中
$$Q_n^m=\left[\frac{\delta_m(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2}\tag{11}$$

该值仅取决于n，m，而与变量γ，θ，λ无关。

把公式（10）代入式（1），并且令

$$g_n^m=g_{n,m}Q_n^m,\quad h_n^m=h_{n,m}Q_n^m$$

即得：

$$U=a\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{a}{\gamma}\right)^{n+1}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta)\tag{12}$$

同理，式（2）—（4）也可以作相应变换。

根据式（10）很容易得到

$$Q_0^0=1,\quad Q_1^1=1\tag{13}$$

$$Q_{m+1}^{m+1}=\left[\frac{1}{(2m+2)(2m+1)}\right]^{1/2}Q_m^m\tag{14}$$

$$Q_{n+1}^m=\left[\frac{n+1-m}{n+1+m}\right]^{1/2}Q_n^m\tag{15}$$

采用这些递推公式可以求出任何Q_n^m（$n=1,\cdots\cdots n$，$m=0,\cdots\cdots n$）。这比运用式（11）要节省时间。

3．$P_n^m(u)$的递推公式。程序的计算速度主要是取决于$P_n^m(u)$和$\frac{dP_n^m(u)}{d\theta}$计算方法的简繁。按式（9）逐一推导其解析式的方法显然是不可取的。应该采用递推方法。

在有关特殊函数的专著中（如文献〔1〕）通常都载有下述递推公式及其推导过程：

$$\begin{vmatrix} P_0^0 & P_1^0 & P_2^0 & P_3^0 & \cdots & P_N^0 \\ & P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 & \cdots & P_N^1 \\ & & P_2^2 & P_3^2 & \cdots & P_N^2 \\ & & & P_3^3 & \cdots & P_N^3 \\ & 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & P_N^N \end{vmatrix}$$

图1　$P_n^m(u)$的三角矩阵

Fig.1. The trigonal matrix of the $P_n^m(u)$

$$P_{n+1}^m(u)=[(2n+1)uP_n^m(u)-(n+m)P_{n-1}^m(u)]/(n+1-m) \tag{16}$$

$P_n^m(u)$可以排列为三角矩阵（如图1），倘若主对角线及其右侧的元素$P_n^m(u)$, $P_{n+1}^m(u)$为已知，则逐行使用公式（16）可以推算出其余元素。

根据二项式公式

$$(u^2-1)^m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k u^{2(m-k)} \tag{17}$$

令式（9）中之$n=m$，将式（17）代入则

$$P_m^m(u)=\frac{1}{2^m m!}(1-u^2)^{m/2}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k\frac{d^{2m}u^{2(m-k)}}{du^{2m}} \tag{18}$$

注意到

$$\frac{d^{2m}u^{2(m-k)}}{du^{2m}}=\begin{cases}(2m)! & (k=0)\\ 0 & (k>0)\end{cases}$$

则　$$P_m^m(u)=\frac{1}{2^m m!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}(2m)!$$

$$\therefore P_{m+1}^{m+1}(u)=\frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}(1-u^2)^{\frac{m+1}{2}}(2m+2)! \tag{19}$$

故　$$P_{m+1}^{m+1}(u)=(2m+1)(1-u^2)^{\frac{1}{2}}P_m^m(u) \tag{20}$$

由于　$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\equiv\sin\theta$

于是 $P_{m+1}^{m+1}(u)(2m+1)\sin\theta P_m^m(u)$　(21)

又由：$$P_{m+1}^m(u)=\frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k C_{m+1}^k\frac{d^{2m+1}u^{2(m+1-k)}}{du^{2m+1}}$$

$$\because \frac{d^{2m+1}u^{2(m+1-k)}}{du^{2m+1}}=\begin{cases}(2m+2)!\ u & (k=0)\\ 0 & (k>0)\end{cases}$$

$$\therefore P_{m+1}^m=\frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}(2m+2)!\ u \tag{22}$$

即　$$P_{m+1}^m=(2m+1)uP_m^m(u) \tag{23}$$

由于$P_0^0(u)\equiv1$，因此按公式(20)可递推出主对角线上其他元素，再按公式(23)又可推算出其右侧的元素。因而由$P_0^0(u)\equiv1$，依次使用公式(20)、(23)和(16)即可建立前述上三角矩阵。由于$P_{m-1}^m(u)\equiv0$，故式(23)实则是式(16)的一个特例。

4. $\frac{dP_n^m(u)}{d\theta}$的递推公式。由于：

$$\frac{dP_n^m(u)}{d\theta}=\frac{dP_n^m(u)}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}=-\sin\theta\frac{dP_n^m(u)}{du} \tag{24}$$

按定义式(9)

$$\frac{dP_n^m(u)}{du}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d(1-u^2)^{\frac{m}{2}}}{du}\frac{d^{n+m}(u^2-1)^n}{du^{n+m}}+$$

$$+\frac{1}{2^n n!}(1-u^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m+1}(u^2-1)^n}{du^{n+m+1}}$$

经过整理即可得到

$$\frac{dP_n^m(u)}{du}=[P_n^{m+1}(u)-muP_n^m(u)/\sin\theta]/\sin\theta \qquad (25)$$

因而 $$\frac{dP_n^m(u)}{d\theta}=\frac{muP_n^m(u)}{\sin\theta}-P_n^{m+1}(u) \qquad (26)$$

5. $\sin m\lambda$和$\cos m\lambda$的递推公式。设:

$S=\sin\lambda$, $C=\cos\lambda$, $S_m=\sin m\lambda$, $C_m=\cos m\lambda$

则 $C_m=\cos[(m-1)\lambda+\lambda]=C_{m-1}C-S_{m-1}S$

$S_m=\sin[(m-1)\lambda+\lambda]=S_{m-1}C+C_{m-1}S$

初值$C_0=1$, $S_0=0$。

四、程序设计

1. 计算流程如“程序设计框图”。

2. g_n^m和h_n^m, $P_n^m(u)$和$\frac{dP_n^m(u)}{d\theta}$可以分别合用一个数组。

3. 如果计算点是不规则展布的，可以利用框图所设计的流程。如果计算点按规则经纬度格网展布，则可将图中*号处改为循环语句。

4. 试验证明，X、Y、Z和T在$1^\circ\times1^\circ$范围内可以视为线性变化。故若测线集中于一个地区，可以先按$1^\circ\times1^\circ$规则格网计算，然后用平面插值法求取实测点上的场值。

5. 在整理单一航次资料时，不必按上述程序逐一计算采样点的场值。只要在各个导航定位段内按80—90公里的间距选择一些控制点计算场值，然后根据采样时间用线性内插法求出采样点的场值。

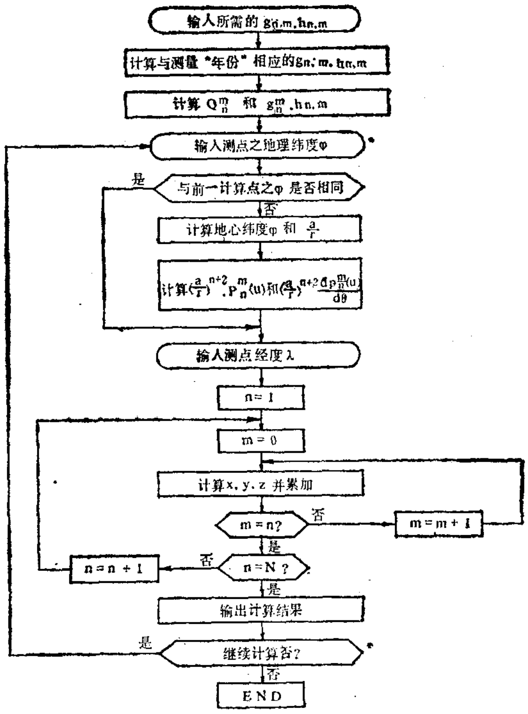

图2　程序设计框图

Fig.2. The block diagram of the program design

6. 通常只计算总强度T，必要时可设置相应语句一举算出各个地磁要素，计算速度几乎不受影响。

7. 用PC-1500机计算一个随机点大约要用50秒钟，若计算点与前一点纬度φ相同，则仅需26秒钟左右。

参 考 文 献

[1] 梁昆淼，1960。数学物理方法。人民教育出版社，第274—294页。

[2] 吕文正，1983。南海地区的地磁正常场。东海海洋 3:16—23。

[3] Norman, W. Peddie and Chairman, 1982. Internationl Geomagnetic Reference Field (1980). *GeopYsics* 47 (5):841—842.

A METHOD AND PROGRAM DESIGN FOR CALCULATION OF INTERNATIONAL GEOMAGNETIC FIELD BY USING PC-1500 TYPE POCKET-SIZE COMPUTER

Lei Shoumin

(Institute of Marine Geology, Ministry of Geology and Mineral Resources)

Wang Shugong　　Gao Yang

(First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration)

Abstract

A set of applied recurrence formulae used to calculate international geomagnetic reference field is deduced in this paper and a program design for calculating the field is also introduced by using PC—1500 type pocket-size computer at a speed of about 50s/point.