生态学最简数学模型的一点注释*

张 炳 根

(山东海洋学院)

当前海洋生物学最突出的内容是生态学，标志着海洋生态学八十年代水平的是生态模型的构作。生态学的数学模型中最简单的是只考虑一个种群的生长过程，这时种群的增长由一阶常微分方程

$$\frac{dN}{dt}=aN \tag{1}$$

描述。式中N是时间t时种群的个体数，而a为内禀（intrinsic）增长率，这方程的解为：

$$N=N_0e^{at} \tag{2}$$

这个模型有两个前提[1]：

1．它假定了种群无限大，即N_0充分大；

2．它忽略了环境中随时间而出现的随机波动。

考虑到环境的随机性，May（1971）提出简单的随机数学模型：

$$\frac{dN}{dt}=(a+Y(t))N \tag{3}$$

其中$Y(t)$是均值为零的白噪声，（3）式是一阶Ito随机微分方程[2]，正确的写法是

$$dN=aNdt+NdB(t) \tag{4}$$

其中$B(t)$是维纳随机过程，假定$E\{B(t)\}=0$，$E\{(dB)^2\}=\sigma^2dt$*方程（4）的解过程为

$$N(t)=N_0e^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+B(t)-B(O)} \tag{5}$$

这不难用It_0微分法则验证。

由（5）式可得各阶矩

$$E\{N^m(t)\}=N_o{}^me^{m\left[a+\frac{\sigma^2}{2}(m-1)\right]t} \tag{6}$$

特别，平均值

$$E\{N(t)\}=N_oe^{at} \tag{7}$$

方差

$$V_{ar}(N)=E\{N^2(t)\}-(E\{N(t)\})^2$$
$$=N_0^2e^{2at}[e^{\sigma^2t}-1] \tag{8}$$

变异系数

$$[V_{ar}(N)]^{1/2}/E\{N\}=(e^{\sigma^2t}-1)^{1/2} \tag{9}$$

由（9）式知道，随时间增长种群的波动愈来愈大；（5）式中，当$\sigma^2>2a$时，该系统当t趋于无穷时会灭种的概率趋于1，即尽管种群的平均值指数增长（由（7）式），但最终会导致灭种这一奇特的结论[1]。

Smith[1]指出环境波动用白噪声描述是有缺陷的，因为它意味着环境的随机波动在时间前后顺序上是毫不相关的。显然，任何真实系统都不是这样的。

因此，我们认为May的模型（3）本身有缺陷，建议采用如下的更切实际的随机模型：

$$\frac{dN}{dt}=(a+Z(t))N \tag{10}$$

假设方程(10)中$Z(t)$是均值为零，相关函数为

$$R(\tau)=\sigma_z^2e^{-a|\tau|} \tag{11}$$

的高斯平稳随机过程，通常在我们观察的时段内形成环境的诸因素没有特别的异常变化，这样假定是合适的。

这时，方程（10）的解过程为

$$N(t)=N_oe^{at+\int_0^tZ(\tau)d\tau} \tag{12}$$

因为$Z(t)$是高斯随机过程，$\int_0^tZ(\tau)d\tau$也是高斯随机过程，且

$$E\{\int_0^tZ(\tau)d\tau\}=0$$
$$E\{e^{\int_0^tz(\tau)d\tau}\}=e^{1/2E\{(\int_0^tz(\tau)d\tau)^2\}}$$

由（12）式 (13)

$$E\{N^m(t)\}=N_0^mE\{e^{amt+m\int_0^tz(\tau)d\tau}\} \tag{14}$$

---

* Smith书[1]上把σ^2说成为白噪声$y(t)$的方差是错误的，白噪声没有有限方差。

计算平均值

$$E\{N\}=N_0e^{at}E\{e^{\int_0^t Z(\tau)d\tau}\} \quad (15)$$

但

$$E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\}=\int_0^t\int_0^t R(s_1-s_2)ds_1ds_2$$
$$=2\int_0^t(t-\tau)R(\tau)d\tau$$

因为

$$\int_0^t R(\tau)d\tau=\frac{\sigma_x^2}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}]$$

$$\int_0^t \tau R(\tau)d\tau=-\frac{\sigma_x^2}{\alpha}[te^{-\alpha t}-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}]$$

于是，平均值为

$$E\{N\}=N_0\exp(at+\frac{\sigma_x^2}{\alpha}(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}))) \quad (16)$$

注意到级数展开式

$$e^{\alpha t}=1-\alpha t+\frac{(-\alpha t)^2}{2!}+\cdots\cdots \quad (17)$$

若采用近似公式

$$e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t \quad (18)$$

即得

$$E\{N\}\approx N_0\exp(at) \quad (19)$$

计算N的方差

$$V_{ar}(N)=E\{N^2\}-(E\{N\})^2$$
$$E\{N^2\}=N_0^2e^{2at}E\{e^{2\int_0^t Z(\tau)d\tau}\}$$

但 $E\{\exp(2\int_0^t Z(\tau)d\tau)\}=\exp(2E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\})$

$$V_{ar}(N)=N_0^2\exp(2at+2E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\})$$
$$-N_0^2\exp(2at+E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\}$$
$$=N_0^2\exp(2at+E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\})$$
$$\times[\exp(E\{(\int_0^t Z(\tau)d\tau)^2\}-1]$$
$$=N_0^2\exp(2at+\frac{2\sigma_x^2}{\alpha}\left(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right))$$
$$\times[\exp\left(\frac{2\sigma_x^2}{\alpha}(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}))-1\right] \quad (20)$$

变异系数为

$$(V_{ar}(N))^{1/2}/E\{N\}=[\exp\left(\frac{2\sigma_x^2}{\alpha}(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})))-1\right]^{1/2} \quad (21)$$

若采用近似公式（18），则$V_{ar}(N)\approx 0$

令

$$Z=\int_0^t Z(\tau)d\tau$$

变量Z有高斯分布，均值$E\{Z\}=0$，方差

$$E\{Z^2\}=\frac{2\sigma_x^2}{\alpha}(t-\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}))$$

方程（10）的解过程一般不再是高斯过程了。

现在对我们提出的生态模型（10）作如下分析。

从对生态的环境波动的实际情况出发，我们认为采用有相关函数（11）的平稳随机过程比采用白噪声更接近实际，根据模型（10）有如下结论：

（1）考虑环境的随机波动以后，种群的平均规律将不同于忽略环境影响的情况，种群的平均值增长将比未扰动的情况增长快，模型(10)解过程的方差随时间增长也比白噪声的情况增长快，即有色噪声比白噪声带来更大的变异性。

（2）若采用近似公式（18），则种群的变动与未受扰动一致，几乎确定性地按指数增长，短时间内种群按指数增长已为若干实验所证实。

（3）若噪声$Z(t)$的相关函数（11）中令$\sigma^2\to\infty$，$\alpha\to\infty$又$\frac{\sigma^2}{\alpha}\to\pi S_0$，这时$Z(t)$趋向于谱密度等于$S_0$，相关函数$R_y(\tau)=2\pi S_0\delta(\tau)$的高斯白噪声，（16）式变成

$$E\{N\}=N_0\exp(at+\pi S_0t) \quad (22)$$

即噪声$Z(t)$趋向于谱密度为S_0的白噪声，但(22)式与直接采用模型(3)得到的(7)式不符，怎么来解释这个现象呢？情况是这样的：如果模拟种群变动的生态模型为（10）式，只是噪声$Z(t)$具有较宽的平直频带逼近白噪声$Y(t)$，而为了简化计算直接在方程（10）中用白噪声$Y(t)$来代替$Z(t)$，从而得出生态

（下转第57页）

陆坡下面是被薄层第三纪沉积岩所覆盖的很厚的古生代和中生代沉积岩层。也就是说，充塡有大陆碎屑的边缘槽地，是大西洋型大陆边缘的特色之一。这里，沉积层的构造扰动通常是和缓的，现代的火山活动和地震都是从属的。在大的流域系统前面，例如尼日尔河、刚果河、亚马逊河和密西西比河前面往往有很厚的碎屑沉积楔，它构成那里大陆边缘的重要特色。

此外，一些学者认为，大西洋型大陆边缘的下沉，是发生在裂开的大陆块从扩张脊漂移开来的时候，是上地幔与地壳冷却和热差异的结果。如美国学者A.R.Green（1977）指出，在美国大西洋岸观察到的下沉速率，是以约五千万年为时间常数呈指数下降的。

关于大西洋型大陆边缘的形成模式，可以下图（图4）表示。

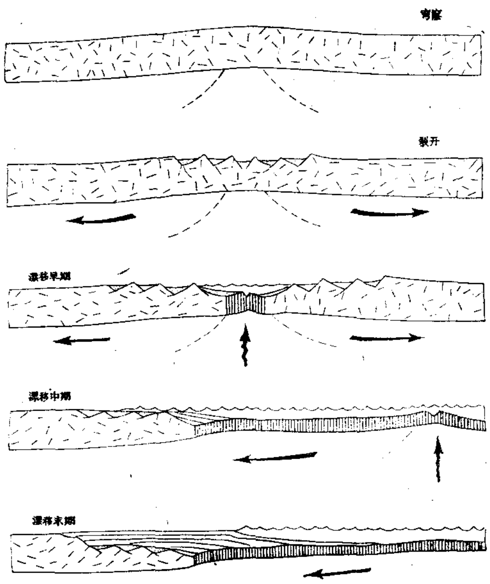

图4　大西洋型大陆边缘形成过程图

二、世界瞩目的大陆边缘探索

对大陆边缘探索，正逐渐发展为一股国际性的新热潮。

“地球动力学计划”（GDP）期间，人们研究了板块内部和边缘的构造活动，研究了太平洋大陆边缘地震活动带及它与近代构造史的关系，研究了岛弧、裂谷带和幼年褶皱山系等狭窄活动带的作用力和作用过程等。在“国际海洋调查十年计划”（IDOE，1970—1980）期间，世界上亦有许多学者致力于更好地认识大陆边缘和海洋深处的地质过程和矿物富集过程。在IDOE期间，人们研究了大西洋大陆边缘，旨在发现非洲是怎样及何时与南美洲分离的，以便揭示大陆边缘及邻近的深海底后来的历史与发展，并探出经济矿床来。

本世纪八十年代，国际上正发起一项规模宏大的“国际固体地球科学研究计划”（PROGRAM OF INTERNATIONAL RESERCH IN THE SOLID EARTH SCIENCE）。在此项计划中亦包括“大陆边缘岩石圈的形成与演化”、“板块边缘或构造活动区的应变积累和应力释放”、“岩石圈和软流圈的构造和成分”等课题。可以认为，通过此项宏大的国际联合研究计划的实施，人们对大陆边缘问题的理解将跨进一个新的更为深化的阶段。

（上接第36页）模型（3），这种做法表面上看是合理的，但实际上是错误的。因为方程（3）与方程(10)属于有本质不同的两类随机微分方程，不能用简单的直接替换来代替[2]。

也就是说，如果在数学模型(10)中$Z(t)$有宽的频带想用白噪声近似它，则不能简单地用(3)代替（10）而应该用

$$\frac{dN}{dt}=(a+\pi S_0+Y(t))N \qquad (23)$$

来代替方程（10），其中S_0是所用白噪声$Y(t)$的谱密度值，若$Y=\frac{dB}{dt}$，B是维纳过程，$E\{(dB)\}=0$，$E\{(dB)^2\}=\sigma^2dt$，则$\pi S_0=\frac{\sigma^2}{2}$，模型(23)才是宽带有色噪声模型(10)的近似。

我们认为May的模型问题可能在这里，所以按照他提出的模型（3），当$\sigma^2>2a$时灭种的概率趋于1（当$t\to\infty$），对于本文提出的模型（10）就没有这种结论。

参考文献

〔1〕J. M. 史密斯，1979。生态学模型。科学出版社。
〔2〕L. Arnold.（1974）*Stochastic Ditterential Equations Theory and Applications.* John Wiley, New York.