



表面噪声源的噪声场

时空相关函数

唐 应 吾

(中国科学院声学研究所)

噪声场的时空相关数由于在抗干扰应用上的重要性,已引起人们的注意,并已做了一些理论和实验的研究^[1,3-8]。

噪声场时空相关函数的较早期工作是厄卡特^[3]作的,他建立了所讨论的空间内无噪声源时的时空相关函数所满足的微分方程组,从而导出了均匀各向同性噪声场的时空相关函数的表式。1962年,柯罗尼与谢曼^[4]就海水介质是均匀和无吸收的情况,计算了两种噪声模型的单频归一化空间相关函数。1966年,许祯镛^[1]采用传播网络算子工具,建立了所讨论区域内有噪声源情况下的噪声场时空相关函数所满足的微分方程组,同时也给出噪声场时空相关函数依赖于各种水文条件、边界条件与噪声源时空特性的积分表式,这个表式可作为计算在各种情况下噪声场时空相关函数的基础。

近年来许多实验指出,海洋中的环境噪声主要来自海水表面,而起源于海水表面的100赫兹以上的噪声是具有指向性的,100赫兹以下的指向性不明显(不具指向性)。因此,研究具有指向性与无指向性两种表面噪声源的噪声场时空相关函数是十分重要的。在本文中,我们从维纳-辛欣关系出发导出了噪声场时空相关函数的积分表式,由此计算了吸收介质中表面噪声源的噪声场的空间互功率谱等问题,并给出了便于计算的近似表式。

一、噪声场时空相关函数的积分表式

假设噪声源是均匀而独立地分布于空间中,并令 $\Psi(x_1, x_2, \tau)$ 是具有时延 τ 的两点 $(x_1$ 与 $x_2)$ 的噪声场时空相关函数; $\rho(x_1, x_2)$ 为噪

声场的单频归一化空间相关函数; $F_{x_1x_2}(\omega)$ 为噪声场的空间互功率谱; $F(\omega)$ 为噪声场的功率谱; $S(\omega)$ 为噪声源的功率谱; Ω 为噪声源所充满的空间; $P_x(i\omega)$ 为某一噪声源的单频分量在 x 点处所产生的声压; $K_x(i\omega)$ 为单位简谐点源在 x 点处所产生的声场[即 $K_x(i\omega)$ 满足波动方程 $\nabla^2 K_x(i\omega) + k^2 K_x(i\omega) = -4\pi\delta(x - x_0)$ 和相应的定解条件; k 为介质中的波数]。则由维纳-辛欣关系可以写出:

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{x_1x_2}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \times \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \rho(x_1, x_2) \exp(i\omega\tau) d\omega \\ &\cong \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{\int_{\Omega} \langle P_{x_1}(i\omega) P_{x_2}(-i\omega) \rangle d\Omega'}{\int_{\Omega} \langle |P_{x_1}(i\omega)|^2 \rangle d\Omega'} \\ &\quad \exp(i\omega\tau) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \langle P_{x_1}(i\omega) P_{x_2}(-i\omega) \times \\ &\quad \rangle \exp(i\omega\tau) d\Omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} s(\omega) k_{x_1}(i\omega) k_{x_2} \times \\ &\quad (-i\omega) \exp(i\omega\tau) d\Omega' d\omega \quad (1)\end{aligned}$$

这就是所要求的噪声场时空相关函数的积分表式,它与文献[1]中的结果相同;式中 ω 为角频, $\langle \dots \rangle$ 表示对时间取平均; $i = \sqrt{-1}$ 。

二、具有指向性的表面噪声源的噪声场时空相关函数

取座标如图1。 N 为一噪声源(噪声源均匀而独立地分布在海水表面上,即分布在 xy 平面上), x_1 与 x_2 为两接收点, r_1 和 r_2 各为 N 至 x_1 与 x_2 的距离, x_1 至 x_2 的距离为 l , γ 为 x_1 与 x_2 的连线和水平面的夹角, Z 为两

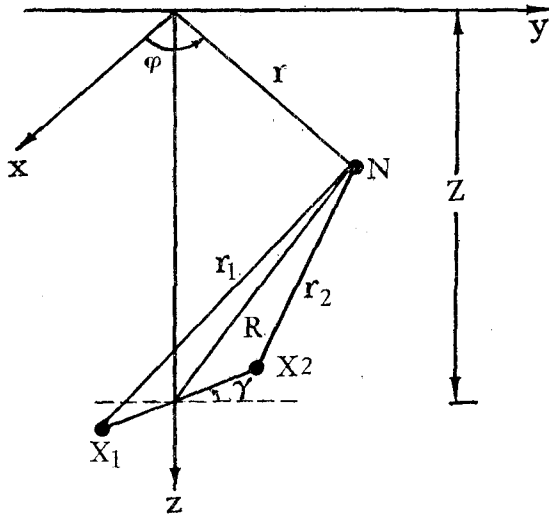


图 1

接收点平均深度。这时，若考虑到表面噪声源具有指向性，则有

$$K_{x_1}(i\omega) = g(\theta) \frac{\exp(ikr_1 - \alpha r_1)}{r_1} \quad (2)$$

式中 α 为海水中的声振幅吸收系数； $g(\theta)$ 为指向性因子，实验证明 $g(\theta) \approx Z/r$ (r 为 N 至 x_1 与 x_2 的连线中心的距离)。 $K_{x_2}(-i\omega)$ 的表式可同样给出。将 $K_{x_1}(i\omega)$ 与 $K_{x_2}(-i\omega)$ 的表式代入(1)式中，有

$$\Psi(x_1, x_2, \tau) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} s(\omega) Z^2 \frac{\exp(-2\alpha r)}{r^4} \times \exp[i(kr_1 - kr_2) + i\omega\tau] d\Omega' d\omega \quad (3)$$

当 Z 甚大于两接收点之间的距离 l 时，由图1可求得^[4]

$$r_1 - r_2 \approx l \cos\theta \sin\gamma + l \sin\theta \cos\gamma \sin\varphi \quad (4)$$

这里 φ 为 r 与 x 轴之间的夹角。把(4)式代入(3)式中，并注意到零阶贝塞尔函数的积分表式，有

$$\Psi(x_1, x_2, \tau) = \Psi(l, \gamma, \tau)$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta J_0(kl \cos\gamma \sin\theta) \\ &\times \exp\left(-\frac{2\alpha Z}{\cos\theta} + ikl \cos\theta \sin\gamma\right) \end{aligned}$$

$$+ i\omega\tau) d\theta d\omega \quad (5)$$

为了使结果便于讨论与应用，我们只讨论 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = \pi/2$ 两种情况。

1. 当 $\gamma = 0$ 时，(5)式变为

$$\Psi(l, 0, \tau) =$$

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta J_0(kl \sin\theta) \\ &\times \exp(i\omega\tau - 2\alpha Z / \cos\theta) d\theta d\omega \quad (6) \end{aligned}$$

将 $J_0(kl \sin\theta)$ 展成级数，并完成对 θ 的积分，有

$$\Psi(l, 0, \tau) =$$

$$\begin{aligned} &2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \exp(i\omega\tau) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(K!)^2} \left(\frac{kl}{2}\right)^{2k} a_k d\omega \quad (6') \end{aligned}$$

式中

$$a_k = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{\nu} C_k^{\nu} b_{\nu},$$

$$C_k^{\nu} = K! / (K-\nu)! \nu!,$$

$$b_{\nu} = e^{-2\alpha Z} \sum_{\lambda=0}^{2\nu+1} \frac{(-1)^{\lambda} (2\alpha Z)^{\lambda}}{(2\nu+2)(2\nu+1)\cdots(2\nu+\nu-\lambda)}$$

$$- \frac{(2\alpha Z)^{2(\nu+1)}}{(2\nu+2)} E_i(-2\alpha Z),$$

$E_i(-2\alpha Z)$ 为积分指数函数。

于是空间互功率谱可以写为

$$F_{x_1 x_2}(\omega) =$$

$$2\pi s(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(K!)^2} \left(\frac{kl}{2}\right)^{2k} a_k \quad (7)$$

2. 当 $\gamma = \pi/2$ 时，(5)式变为

$$\Psi(l, \frac{\pi}{2}, \tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta$$

$$\times \exp\left(\frac{2\alpha Z}{\cos\theta} + ikl \cos\theta + i\omega\tau\right) d\theta d\omega \quad (8)$$

将 $\exp(ikl \cos\theta)$ 展成级数，并完成对 θ 的积分，得

$$\Psi(l, \frac{\pi}{2}, \tau) =$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \left[\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K}}{(2K)!} B_K + i \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K+1}}{(2K+1)!} D_K \right] \exp(i\omega\tau) d\omega$$

这里

$$B_K = e^{-2\alpha Z} \sum_{\nu=0}^{2K+1} \frac{(-1)^\nu (2\alpha Z)^\nu}{(2K+2)(2K+1)\cdots(2K+2-\nu)} - \frac{(2\alpha Z)^{2K+2} E_i(-2\alpha Z)}{(2K+2)!},$$

$$D_K = e^{-2\alpha Z} \sum_{\nu=0}^{2K+2} \frac{(-1)^\nu (2\alpha Z)^\nu}{(2K+3)(2K+2)\cdots(2K+3-\nu)} + \frac{(2\alpha Z)^{2K+3} E_i(-2\alpha Z)}{(2K+3)!}$$

于是空间互功率谱可以写为

$$F_{x_1 x_2}(\omega) = 2\pi s(\omega) \left[\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K}}{(2K)!} B_K + i \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K+1}}{(2K+1)!} D_K \right] \quad (9)$$

由(7)式和(9)式, 可求出噪声场的功率谱为

$$F(\omega) = \pi s(\omega) [(1-2\alpha Z) \exp(-2\alpha Z) - (2\alpha Z)^2 E_i(-2\alpha Z)] \quad (10)$$

用(10)式去除(7)式和(9)式, 有

$$\rho(l, 0) = \frac{2 \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{1}{(K!)^2} \left(\frac{kl}{2}\right)^{2K} a_K}{(1-2\alpha Z) \exp(-2\alpha Z) - (2\alpha Z)^2 E_i(-2\alpha Z)} \quad (11)$$

$$\rho(l, \frac{\pi}{2}) = \frac{2 \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K}}{(2K)!} B_K + i \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K+1}}{(2K+1)!} D_K}{(1-2\alpha Z) \exp(-2\alpha Z) - (2\alpha Z)^2 E_i(-2\alpha Z)} \quad (12)$$

可以证明, 当 $\alpha=0$ 时, 公式(11)和(12)变为

$$\rho(l, 0) = \frac{2J_1(kl)}{kl} \quad (13)$$

$$\rho(l, \frac{\pi}{2}) = 2 \left[\frac{e^{ikl}}{ikl} + \frac{e^{ikl}}{k^2 l^2} - \frac{1}{k^2 l^2} \right] \quad (14)$$

这些结果与文献[4,8]中的是一致的; 式中 $J_1(kl)$ 为一阶贝塞尔函数。

三、结果的简化

式(6)与(8)或式(7)和(9)虽然精确, 但算起来是很麻烦的, 下面根据一些实际条件来对上节中的结果作某些简化。通常, 条件

$$kl > 1 \text{ 和 } \alpha Z \ll 1 \quad (15)$$

是成立的。这时, 当 θ 在0附近时, 函数 $\exp[-2\alpha Z/\cos\theta]$ 为 θ 的徐变函数, 而函数 $\sin\theta \cos\theta J_0(kl \sin\theta)$ 和 $\sin\theta \cos\theta \exp(ikl \cos\theta)$ 为速变函数(相对于 $\exp[-2\alpha Z/\cos\theta]$ 来说), 因此“点”近似^[2]可以应用。这样, 公式(6)和(8)可以写为

$$\Psi(l, 0, \tau) \cong 2\pi \times \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \frac{J_1(kl)}{kl} \exp(-2\alpha Z + i\omega\tau) d\omega \quad (16)$$

$$\Psi(l, \frac{\pi}{2}, \tau) \cong 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \exp(-2\alpha Z + i\omega\tau) \times \left[\frac{e^{ikl}}{ikl} + \frac{e^{ikl}}{k^2 l^2} - \frac{1}{k^2 l^2} \right] d\omega \quad (17)$$

由上两式可写出空间互功率谱:

$$F_{x_1 x_2}(\omega) = \begin{cases} 2\pi s(\omega) e^{-2\alpha Z} \frac{J_1(kl)}{kl} (\gamma=0); \\ 2\pi s(\omega) \exp(-2\alpha Z) \\ \times \left[\frac{e^{ikl}}{ikl} + \frac{e^{ikl}}{k^2 l^2} - \frac{1}{k^2 l^2} \right] \\ (\gamma=\pi/2) \end{cases} \quad (18)$$

由此我们可写出噪声场的功率谱的近似表式:

$$F(\omega) = \pi s(\omega) \exp(-2\alpha Z) \quad (19)$$

显然, 当条件(15)严格成立时, (19)式为(10)式的一个良好近似。当然, 若条件(15)不成立时, 在本节中得出的结果则失效。

四、无指向性的表面噪声源

的噪声场时空相关函数

在第三节所讨论的问题是就 $g(\theta) = \cos\theta$ 进行的。实验证明, 当频率很低时(100赫兹以下), $g(\theta) \approx 1$ 。这时, (5)式变为

$$\Psi(l, \gamma, \tau) =$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \theta J_0(kl \cos \gamma \sin \theta) \times e^{-2\alpha Z \sec \theta} e^{ikl \cos \theta \sin \gamma + i\omega \tau} d\theta d\omega \quad (20)$$

重复前面的计算, 可得

$$\Psi(l, 0, \tau) = 2\pi \times \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(K!)^2} \left(\frac{kl}{2}\right)^{2K} C_K e^{i\omega \tau} d\omega \quad (21)$$

$$\Psi(l, \frac{\pi}{2}, \tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega \tau} \times \left[\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K}}{(2K)!} n_K + i \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K+1}}{(2K+1)!} m_K \right] d\omega \quad (22)$$

式中 $C_K = \sum_{\nu=0}^K (-1)^{\nu} C_K^{\nu} G_{\nu},$

$$G_{\nu} = e^{-2\alpha Z} \sum_{\lambda=1}^{2\nu} \frac{(-2\alpha Z)^{\lambda-1}}{2\nu(2\nu-1)\cdots(2\nu+1-\lambda)} - \frac{(-2\alpha Z)^{2\nu}}{(2\nu)!} E_i(-2\alpha Z),$$

$$n_K = e^{-2\alpha Z} \sum_{\nu=1}^{2K} \frac{(-2\alpha Z)^{\nu-1}}{2K(2K-1)\cdots(2K+1-\nu)} - \frac{(-2\alpha Z)^{2K}}{(2K)!} E_i(-2\alpha Z),$$

$$m_K = e^{-2\alpha Z} \sum_{\nu=1}^{2K+1} \frac{(-2\alpha Z)^{\nu-1}}{(2K+1)(2K)\cdots(2K+2-\nu)} - \frac{(-2\alpha Z)^{2K+1}}{(2K+1)!} E_i(-2\alpha Z)$$

于是, 噪声场的空间互功率谱为

$$F_{x_1 x_2}(\omega) = 2\pi s(\omega)$$

$$\times \begin{cases} \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{1}{(K!)^2} \left(\frac{kl}{2}\right)^{2K} C_K & (\gamma=0); \\ \left[\sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K}}{(2K)!} n_K + i \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(kl)^{2K+1}}{(2K+1)!} m_K \right] & (\gamma=\pi/2) \end{cases} \quad (23)$$

由此, 可得噪声场的功率谱:

$$F(\omega) = -2\pi s(\omega) E_i(-2\alpha Z) \quad (24)$$

可以想象, 当噪声源分布在海水表面时, 水听器在深水层中应比在浅水中“寂静”得多。但从(10)式中可以看出, 在 $\alpha = 0$ 时, 噪声级与深度无关。图2示出了相对噪声级对 αZ 的依赖关系。

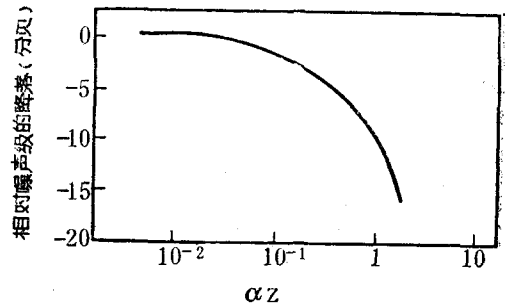


图 2

参 考 文 献

- [1] 许祯镛, 1966. 声学学报 3 (1): 34—40.
- [2] 王如琳, 陈生忠, 1965. 物理学报 21 (5): 907—914.
- [3] 厄卡尔特, 1960. 水声学(1): 182—191.
- [4] Cron, B. F., et al, 1962. J. Acoust. Soc. Am. 34 (10): 1732—1736.
- [5] Cron, B. F., et al, 1965. J. Acoust. Soc. Am. 37 (3): 523—529.
- [6] Arase, E. M., et al, 1965. J. Acoust. Soc. Am. 38 (1): 146—148.
- [7] Arase, E. M., et al, 1966. J. Acoust. Soc. Am. 40 (1): 205—210.
- [8] Cron, B. F., et al, 1965. J. Acoust. Soc. Am. 38 (3): 885.